Б.Баяржаргал, Э.Азжаргал, Д.Анхтуяа, Ж.Батболд,
М.Бат-Эрдэнэ, Д.Даваасүрэн, Ж.Дэнсмаа,
А.Наранхүү, Б.Сандагдорж, Д.Түвшинжаргал,
Д.Түмэнбаяр, Н.Цогзолмаа, Э.Чойсүрэн, Б.Энхболд

МАТЕМАТИК

X

Ерөнхий боловсролын 12 жилийн сургуулийн
10 дугаар ангийн сурах бичиг

Боловсрол, Соёл, Шинжлэх Ухаан, Спортын Яамны
зөвшөөрлөөр хэвлэв.

Гурав дахь хэвлэл

Улаанбаатар хот
2023 он

ДАА 373
ННА 74.2
М-294

Математик X: Ерөнхий боловсролын 12 жилийн сургуулийн 10 дугаар ангийн сурах бичиг /Баяржаргал.Б., ба бусад; Ред. Пүрэвсүрэн.Д. –УБ., 2017. 220х

Сурах бичгийн талаарх аливаа санал, хүсэлтээ textbook@mecs.gov.mn хаягаар ирүүлнэ үү.

ISBN 978-99978-61-22-1

АГУУЛГА

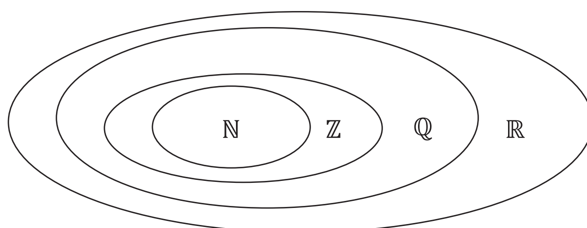
I БҮЛЭГ. ОЛОНЛОГ

Энэ бүлэг сэдвийг судалснаар дараах мэдлэг, чадваруудыг эзэмшинэ.

- *Тоон олонлог өгөх аргуудыг мэдэх*
- *Тэгшитгэл, тэнцэтгэл биш, тэдгээрийн системийн шийдийг бичихэд логик ба геометр дүрслэл хэрэглэх*

Тодорхойлолт. Тодорхой нэг шинж чанараар нь нэгтгэсэн юмсын цуглуулгыг олонлог гэх ба тэрхүү юм тус бүрийг тухайн олонлогийн элемент гэнэ.

Олонлогийг том үсгээр тэмдэглэх ба элементүүдийг жижиг үсгээр их хаалт $\{\}$-д бичдэг. Жишээлбэл: Зоос орхиход илрэх бүх эгэл үзэгдлийн олонлогийг $\Omega=\{$тоо, сүлд$\}$ гэж бичнэ.
Хэрэв A олонлог төгсгөлөг тооны элементтэй бол түүний элементийн тоог $|A|$ гэж тэмдэглэдэг. Дээрх жишээ дээр $|\Omega|=2$ болно.
Зарим олонлогийг тэмдэглэхдээ стандарт тэмдэглэгээ ашигладаг. Тухайлбал: натурал тоон олонлогийг $\mathbb{N}$, бүхэл тооны олонлогийг $\mathbb{Z}$, рационал тооны олонлогийг $\mathbb{Q}$, бодит тооны олонлогийг $\mathbb{R}$ гэж тус тус тэмдэглэж заншжээ. Эдгээр олонлогийг Эйлер-Веннийн диаграммаар дараах зурагт дүрслэв.



Олонлогийг хоёр аргаар өгч болно.
I. Бүх элементийг нь тоочих арга. Жишээлбэл: Шагай орхих туршилтад илрэх бүх эгэл үзэгдлийн олонлогийг $S=\{$хонь, ямаа, морь, тэмээ$\}$, бүх тэгш тооны олонлогийг $T=\{2,4,6,8,\ldots\}$ гэж бичнэ.
II. Элементийн шинж чанарыг нь математик хэллэгээр илэрхийлэх арга. Үүний тулд $S=\{s\,|\ldots\}$ гэсэн бичлэгийн гурван цэгийн оронд уг олонлогийн элементийн шинж чанарыг хэллэгээр буюу эсвэл томьёогоор бичдэг. Жишээлбэл: 4-д хуваахад үлдэгдэл нь 3 гардаг бүхэл тооны олонлогийг $C=\{l\ |l=4k+3,\ k\in\mathbb{Z}\}$ гэж бичиж болно.

Тодорхойлолт. $\{(a,b)\,|\,a\in A, b\in B\}$ олонлогийг A, B олонлогийн элементээс зохиосон эрэмбэлсэн хосын олонлог гэнэ. Эрэмбэлсэн хосын хувьд (a,b), (b,a) хоёрыг ялгаатай гэж үздэг.
Түүнчлэн $\{(a,b,c)\,|\,a\in A, b\in B, c\in C\}$ олонлогийг A, B, C олонлогийн элементээс зохиосон эрэмбэлсэн гурвалын олонлог гэнэ.

Жишээ 1. Гурван шоог зэрэг орхих туршилтад буусан нүдний нийлбэр 6 байх үзэгдэлд хэдэн эгэл үзэгдэл харьяалагдах вэ?

Бодолт. Гурван шоог зэрэг орхих туршилтад буусан нүдний нийлбэр нь 6 байх үзэгдлийг Q гэж тэмдэглэе. Энэ олонлогийн элемент эрэмбэлсэн гурвал байх бөгөөд уг олонлогийг Q={(4, 1,1), (1, 4,1), (1,1,4), (3, 2,1), (3,1,2), (2,3,1), (2,1,3), (1,2,3), (1,3,2), (2,2,2)} гэж тоочиж тодорхойлж болно. Иймээс $|Q| = 10$ байна.

Жишээ 2. 3-д хуваагддаг бүх натурал тоон олонлогийг ямар бичлэгээр өгч болох вэ?
Бодолт. 3-д хуваагддаг бүх натурал тооны олонлог төгсгөлгүй олон элементтэй бөгөөд үүнийг M={3,6, 9,12, ...} гэж тоочих аргаар, мөн $M = \{n \mid n = 3k, k \in \mathbb{N}\}$ гэж элементийн шинжээр нь тодорхойлж болно.

Жишээ 3. Координатын эх дээр төвтэй, нэгж радиустай тойргийн цэгийн олонлогийг ямар аргаар тодорхойлж болох вэ?
Бодолт. Координатын эх дээр төвтэй, нэгж радиустай тойргийн цэгийн олонлогийг тоочих аргаар тодорхойлох боломжгүй тул шинж чанараар нь $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1,\ x, y \in \mathbb{R}\}$ гэж тодорхойлох нь тохиромжтой.

Хэрэв a элемент A олонлогт харьяалагдаж байвал $a \in A$ гэж, хэрэв харьяалагдахгүй байвал $a \notin A$ гэж бичдэг. Жишээлбэл, $\frac{2}{3} \notin \mathbb{N}, -2 \in \mathbb{Z}, \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}, \pi \in \mathbb{R}$.
Нэг ч элементгүй олонлогийг хоосон олонлог гэх бөгөөд $\varnothing$ гэж тэмдэглэдэг. Жишээлбэл: $M = \{x \mid x^2 = 2, x \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{Q}$ олонлогууд үл огтлолцох учраас $M \cap \mathbb{Q} = \varnothing$ гэж бичнэ. Учир нь $\sqrt{2}$ рационал тоо биш.

Тодорхойлолт. Хэрэв B олонлогийн элемент бүр A олонлогт харьяалагдаж байвал B олонлогийг A олонлогийн дэд олонлог гэх бөгөөд $B \subset A$ гэж тэмдэглэдэг.

Жишээлбэл: Натурал тоо бүр рационал тоо болох учраас $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ болно. Мөн энэ тодорхойлолт ёсоор $A \subset A$ буюу өөрөөр хэлбэл аливаа A олонлог өөрөө өөрийнхөө дэд олонлог байна. Жишээлбэл: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ байдгийг бид мэддэг.
Хоосон олонлог нь дурын олонлогийн дэд олонлог буюу $\varnothing \subset A$ гэж үздэг.
Дараах хүснэгтэд тоон завсрыг тэнцэтгэл биш хэлбэрээр тодорхойлж, дүрслэл, тэмдэглэгээг харуулав.

Тоон завсрын нэр	Тодорхойлолт	Дүрслэл	Тэмдэглэгээ
a, b төгсгөлтэй хэрчим	$a \le x \le b$	a b	$[a, b]$
a-аас b хүртэлх задгай завсар	$a < x < b$	a b	$]a, b[$
a-аас b хүртэлх хагас задгай завсар	$a \le x < b$	a b	$[a, b[$
a-аас b хүртэлх хагас задгай завсар	$a < x \le b$	a b	$]a, b]$
a эхлэлтэй цацраг	$x \ge a$	a	$[a, +\infty[$

a эхлэлтэй задгай цацраг	$x > a$		$]a, +\infty[$
a эхлэлтэй цацраг	$x \le a$		$]-\infty, a]$
a эхлэлтэй задгай цацраг	$x < a$		$]-\infty, a[$
тоон шулуун	$-\infty < x < +\infty$		$]-\infty, +\infty[$ буюу $\mathbb{R}$

Жишээ 4. $(x-6)(x+5)=0$ тэгшитгэлийг бод.
Бодолт. Өгсөн нөхцөлөөс $x-6=0$, $x+5=0$ тэнцэтгэлүүдийн ядаж нэг нь биелнэ гэж гарна. Нэгэнт эдгээр тэнцэтгэл нэгэн зэрэг биелэх боломжгүй учир яг нэг нь биелнэ. $x-6=0$ тохиолдлоос $x_1=6$ болох ба $x+5=0$ тохиолдлоос $x_2=-5$ гэж гарна. Ийм учраас өгсөн тэгшитгэлийн шийдийн олонлог $\{-5, 6\}$ болно.

Жишээ 5. $(x-3)(x+2)>0$ тэнцэтгэл бишийг бод.
Бодолт. $(x-3)(x+2)$ илэрхийллийн x хувьсагчийн оронд –2-оос бага эсвэл 3-аас их ямар ч утга орлуулбал илэрхийлэл эерэг утга авах ба –2-оос 3-ын хоорондох дурын утга орлуулбал илэрхийлэл сөрөг утга авна. Үүнийг тоон шулуун дээр дүрсэлбэл

болох ба эндээс өгсөн тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог $]-\infty,-2[\cup]3,+\infty[$ гэсэн задгай завсруудын нэгдэл байна.

Жишээ 6. $2x-1<5$, $4x-2\ge 0$ гэсэн хоёр тэнцэтгэл бишийг
а. нэгэн зэрэг хангах
б. ядаж нэгийг нь хангах бодит тооны олонлогийг ол.

Бодолт. Эхний тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог $M=]-\infty,3[$ болох ба хоёр дахь тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог $N=\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ байна.

а. Иймээс өгсөн тэнцэтгэл бишүүдийг нэгэн зэрэг хангах бодит тооны олонлог нь $M\cap N=\left[\frac{1}{2},3\right[$ гэсэн задгай завсар болно.

б. Өгсөн тэнцэтгэл бишүүдийн ядаж нэгийг хангах бодит тооны олонлог нь $M\cup N=\left]-\infty, 3\left[\cup\right[\frac{1}{2},+\infty\right[$ гэсэн хоёр задгай завсрын нэгдэл болно. Энэ нь $]-\infty,+\infty[$ буюу бүх бодит тооны олонлог болно.

1. 100-аас бага, 3 ба 4-ийн ядаж нэгэнд нь хуваагддаг натурал тооны олонлог хэдэн элементтэй вэ?
2. 100-аас ихгүй, 100-тай харилцан анхны хэдэн тоо байх вэ?
3. $A=\{n|n=3k+2, n<100, k\in\mathbb{N}\}$ олонлог хэдэн элементтэй вэ?
4. $F=\{(n,m)|1\le n\le 8, 1\le m\le 10, n,m\in\mathbb{N}\}$ олонлогийн элементийн тоог ол.

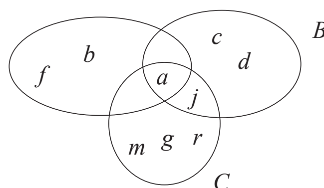
5. Тэгшитгэлийн шийдийн олонлогийг ол.
а. $|x-3|=-5$ б. $2|x-1|=0$ в. $a^2-2a+1=0$ г. $(x-3)(x+5)=0$

6. Тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлогийг олж, тоон шулуун дээр дүрсэл.
а. $2x+5>-5x+12$ б. $|x-2|\le 0$ в. $3<5x+2\le 7$ г. $x^2-8x+16\le 0$

7. $]-\infty,6]$, $]-3,+\infty]$ хоёр завсрын нэгдэл ба огтлолцлыг олж, тоон шулуун дээр дүрсэл.

8. $2x-4>2$, $3x+1<4$ тэнцэтгэл биш тус бүрийн шийдийн олонлогийн огтлолцол ба нэгдлийг олж, тоон шулуун дээр дүрсэл.

9. Дараах Эйлер-Веннийн диаграмм ашиглан
а. $A\cup B$, $B\cap C$, $A\cap B\cap C$ олонлогийн элементийг жагсаан бич.
б. A, C олонлогийн элементээс зохиож болох бүх эрэмбэлсэн хосын олонлог хэдэн элементтэй вэ?
в. A, B олонлогийн элементээс зохиож болох бүх эрэмбэлсэн хосыг жагсаан бич.



10. Дараах хоёр олонлогийн огтлолцол болон нэгдлийг олж, тоон шулуун дээр дүрсэл.
а. $]-\infty,6]$, $]-3,+\infty]$ б. $[-3,2]$, $[3,6]$
в. $]-\infty,5]$, $]0,6[$ г. $[-2,4]$, $[1,+\infty[$

11. Хоёр шоо зэрэг орхих туршилт хийв. Туршилтын үр дүнд ядаж нэг шоо 3-аас бага тоогоор буух үзэгдэлд харьяалагдах бүх эгэл үзэгдлийг жагсаан бичээд уг үзэгдлийн магадлалыг ол. Нэг шоо 2-оос цөөн нүдээр, нөгөө шоо 4-өөс олон нүдээр буух үзэгдэл ямар эгэл үзэгдлүүдээс тогтох вэ?

12. Утанд 3 хөх, 3 улаан бөмбөг байв. Уутнаас хоёр бөмбөг таамгаар сугалахад
а. ядаж нэг улаан бөмбөг гарч ирэх,
б. яг нэг хөх бөмбөг гарч ирэх,
в. хоёр улаан бөмбөг гарч ирэх үзэгдэл тус бүр хэдэн эгэл үзэгдлээс тогтох вэ?

13. $M=\{(x,y)|1\le x\le 5, 1\le y\le 5, x,y\in\mathbb{N}\}$ олонлогийг координатын хавтгайд дүрслэхэд ямар дүрс үүсэх вэ? Энэ олонлог хэдэн элементтэй вэ?

14. $3<4x-3<6$, $-2<-3x-5<-4$ хоёр тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлогийн огтлолцол ба нэгдлийг олж тоон шулуун дээр дүрсэл.

15. $x+y=10$ тэгшитгэлийн натурал тоон шийдийн олонлог хэдэн элементтэй вэ?

16. Дараах хэллэгүүдээс аль нь үнэн хэллэг вэ?
А. $\sqrt{2}\in\mathbb{Z}$, $\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$ Б. $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$, $5^2+2<0$
В. $\frac{1}{3}\in\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$ Г. $\frac{2}{3}>\frac{3}{5}$, $-2\in]-1,3[$

II БҮЛЭГ. ТООН БА ҮСЭГТ ИЛЭРХИЙЛЭЛ

Энэ бүлэг сэдвийг судалснаар дараах мэдлэг чадварыг эзэмшинэ.

- *Тэгээс ялгаатай тооны тэг илтгэгчтэй зэрэг 1-тэй тэнцүү байдгийг мэдэх.* $a^0=1$
- *Тооны сөрөг тоон илтгэгчтэй зэргийг ойлгох.* $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}, \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-m}=\left(\dfrac{b}{a}\right)^m$
- *Натурал тоон илтгэгчтэй зэргийн чанар нь бүхэл тоон илтгэгчтэй зэргийн хувьд мөн адил биелэхийг мэдэх*
- *Тооны n зэргийн язгуурыг ойлгож мэдэх* $\sqrt[n]{a}$
- *Рационал тоон илтгэгчтэй зэргийн тодорхойлолт мэдэх.* $a^{\frac{n}{k}}=\sqrt[k]{a^n}$
- *Бүхэл тоон илтгэгчтэй зэргийн бүх чанар рационал тоон илтгэгчтэй зэргийн хувьд биелэхийг мэдэх*
- *Стандарт хэлбэрээр бичсэн тооны арифметикийн дөрвөн үйлдэл гүйцэтгэж сурах*
- *Бодит тооны үйлдлийн чанар мэдэх*

2.1. БҮХЭЛ ТООН ИЛТГЭГЧТЭЙ ЗЭРЭГ ТҮҮНИЙ ЧАНАР

Тооны тэг болон сөрөг илтгэгчтэй зэрэг

Бид өмнөх ангиудад натурал тоон илтгэгчтэй тооны зэрэг, түүний чанаруудыг үзсэн. Тухайлбал, m ба n нь натурал тоо бөгөөд $a \neq 0$ тооны хувьд дараах чанарууд биелнэ.

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$
3. $\left(a^m\right)^n = a^{m\cdot n}$
4. $(ab)^m = a^m \cdot b^m$
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^m$

Тодорхойлолт. Аливаа тэгээс ялгаатай тооны тэг зэрэг 1-тэй тэнцүү байна. Өөрөөр хэлбэл $a^0=1$, энд $a \neq 0$.

Тухайлбал: $2^0=1,\ 1.5^0=1,\ (-6)^0=1,\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^0=1,\ \left(\sqrt{3}\right)^0=1,\ (-1.5(3))^0=1$

Тодорхойлолт. n натурал тоо, $a \neq 0$ дурын бодит тооны хувьд $\dfrac{1}{a^n}$ тоог a^{-n} гэж тэмдэглэдэг. Өөрөөр хэлбэл $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ байна.

Тодорхойлолт ашиглан дараах жишээ бодъё.

Жишээ 1. а. $2^{-5}\cdot 2^8$ илэрхийллийн утгыг ол.
б. $5^{-5}\cdot 5^{-12}\cdot 5^{20}$ илэрхийллийн утгыг ол.

в. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$ илэрхийллийг эерэг тоон илтгэгчтэй болгон бич.

Бодолт. а. $2^{-5}\cdot 2^{8}=\frac{1}{2^{5}}\cdot 2^{8}=\frac{2^{8}}{2^{5}}=2^{8-5}=2^{3}=8$

б. $5^{-5}\cdot 5^{-12}\cdot 5^{20}=\frac{1}{5^{5}}\cdot\frac{1}{5^{12}}\cdot 5^{20}=\frac{5^{20}}{5^{5}\cdot 5^{12}}=\frac{5^{20}}{5^{17}}=5^{3}=125$

в. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^{2}}=\frac{1}{\frac{9}{16}}=\frac{16}{9}=\left(\frac{4}{3}\right)^{2}$

Мөрдлөгөө. n натурал тоо, $a\neq 0$ дурын бодит тооны хувьд $\frac{1}{a^{-n}}=1:a^{-n}=1:\frac{1}{a^{n}}=1\cdot\frac{a^{n}}{1}=a^{n}$ болох тул $\frac{1}{a^{-n}}=a^{n}$ байна. Хэрэв $a^{-n}=\frac{1}{a^{n}}$ тэнцэтгэлийн a тоо нь $a=\frac{x}{y}$ хэлбэртэй бол $\left(\frac{x}{y}\right)^{-n}=\frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^{n}}=\frac{1}{\frac{x^{n}}{y^{n}}}=1:\frac{x^{n}}{y^{n}}=\frac{y^{n}}{x^{n}}=\left(\frac{y}{x}\right)^{n}$ буюу $\left(\frac{x}{y}\right)^{-n}=\left(\frac{y}{x}\right)^{n}$

дүгнэлт мөрдөн гарна. Энд $x\neq 0, y\neq 0$ бодит тоо.

Жишээ 2. Утгыг ол.

а. $\left(\frac{8}{11}\right)^{-3}$ б. $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$ в. $\left(1\frac{3}{4}\right)^{-3}\cdot\left(2\frac{5}{8}\right)^{3}$

Бодолт.

а. $\left(\frac{8}{11}\right)^{-3}=\left(\frac{11}{8}\right)^{3}=\frac{11^{3}}{8^{3}}=\frac{1331}{512}$ б. $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}=\left(\frac{5}{1}\right)^{3}=5^{3}=125$

в. $\left(1\frac{3}{4}\right)^{-3}\cdot\left(2\frac{5}{8}\right)^{3}=\left(\frac{7}{4}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{21}{8}\right)^{3}=\left(\frac{4}{7}\right)^{3}\cdot\left(\frac{21}{8}\right)^{3}=\left(\frac{4}{7}\cdot\frac{21}{8}\right)^{3}=\left(\frac{3}{2}\right)^{3}=\frac{27}{8}$

Үйлдлийг гүйцэтгэ.

1. $6^{4}\cdot 6^{-6}$
2. $7^{4}:7^{-6}$
3. $8^{3}\cdot 2^{-8}$
4. $9^{-2}:3^{-6}$
5. $16^{-4}\cdot 8^{-9}$
6. $5^{-4}:5^{-6}$
7. $12^{-3}\cdot 2^{-3}$
8. $9^{-2}:3^{-6}$
9. $12^{4}\cdot 2^{-8}$

Илэрхийллийн утгыг ол.

10. $\left(\frac{5}{6}\right)^{-3}\cdot\frac{5^{3}}{6^{4}}$
11. $2^{4}\cdot 2^{-6}+\left(\frac{4}{7}\right)^{-2}$
12. $\left(\frac{2}{5}\right)^{-5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{3}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{4}$
13. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}-3^{-2}\cdot 3^{3}$
14. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}+5^{-2}:5^{-4}$
15. $\left(\frac{1}{6}\right)^{-2}:\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}-\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$
16. $\frac{4^{-4}\cdot 8^{-6}}{16^{-5}}$
17. $\frac{125^{-3}}{5^{2}\cdot 25^{-6}}$
18. $\left(\frac{7}{9}\right)^{-5}:\left(\frac{9}{7}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^{9}$

Тооны натурал тоон илтгэгчтэй зэргийн чанар нь бүхэл тоон илтгэгчтэй зэргийн хувьд адилхан биелнэ. Өөрөөр хэлбэл m,n нь бүхэл тоо, $a>0, b>0$ бодит тооны хувьд

1. $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$
2. $a^m:a^n=a^{m-n}$
3. $\left(a^m\right)^n=a^{m\cdot n}$
4. $(ab)^m=a^m\cdot b^m$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$

чанарууд биелнэ. Дараах хүснэгтэд илэрхийллийг сөрөг тоон илтгэгчтэй зэргийн тодорхойлолт болон бүхэл тоон илтгэгчтэй зэргийн чанар ашиглан тус тусад нь бодож, утга нь ижил болохыг харуулав.

Илэрхийлэл	Сөрөг тоон илтгэгчтэй зэргийн тодорхойлолт ашигласан бодолт	Зэргийн чанар ашигласан бодолт
$5^{-2}\cdot5^6$	$5^{-2}\cdot5^6=\frac{5^6}{5^2}=5^{6-2}=5^4$	$5^{-2}\cdot5^6=5^{-2+6}=5^4$
$5^{-2}:5^6$	$5^{-2}:5^6=\frac{1}{5^2}\cdot\frac{1}{5^6}=\frac{1}{5^2\cdot5^6}=\frac{1}{5^8}=5^{-8}$	$5^{-2}:5^6=5^{-2-6}=5^{-8}$
$\left(5^{-2}\right)^3$	$\left(5^{-2}\right)^3=\left(\frac{1}{5^2}\right)^3=\frac{1}{5^6}=5^{-6}$	$\left(5^{-2}\right)^3=5^{-2\cdot3}=5^{-6}$
$(5x)^{-2}$	$(5x)^{-2}=\frac{1}{(5x)^2}=\frac{1}{5^2x^2}=\frac{1}{5^2}\cdot\frac{1}{x^2}=5^{-2}x^{-2}$	$(5x)^{-2}=5^{-2}x^{-2}$
$\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}$	$\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}=\left(\frac{5}{4}\right)^3=\frac{5^3}{4^3}=\frac{4^{-3}}{5^{-3}}$	$\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}=\frac{4^{-3}}{5^{-3}}$

Илэрхийллийн утгыг ол.

19. $\frac{8^{-4}}{3^5\cdot16^{-4}}$

20. $\frac{81^{-5}}{3^6\cdot27^{-9}}$

21. $\frac{3\cdot5^8-4\cdot5^9}{5^7}$

22. $\frac{7\cdot9^6+11\cdot27^4}{81^3}$

23. $\frac{39\cdot\left(-\frac{1}{32}\right)^{-2}}{\left(2^2\right)^6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}\cdot64^{-2}+3\cdot4\cdot0\,125^{-1}}$

24. $\frac{\left(\frac{1}{81\cdot7}\right)^{-1}}{9^8\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^8\cdot3^4+\left(-\frac{1}{27}\right)^{-5}\cdot\left(3^{-3}\right)^2\cdot\sqrt[3]{729}}$

25. $\left(16\cdot\left(\left(\frac{3x}{2}\right)^{-2}\right)^{-3}-\left(-3x^3\right)^2-\left(-3^2\right)\cdot\left(x^{-2}\right)^{-3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+\left(-3x^2\right)^3$

26. $\left(\left(-3\cdot\left(a^{-1}\right)^{3}\right)^{-2}-\left(-2a^{2}\right)^{3}-\left(\frac{1}{2}\cdot(-a)^{3}\right)^{-2}\right)^{-1}$

2.2. *n* ЗЭРГИЙН ЯЗГУУР БА *n* ЗЭРГИЙН АРИФМЕТИК ЯЗГУУР, ТҮҮНИЙ ЧАНАР

Бид өмнөх ангидаа квадрат язгуур, арифметик квадрат язгуурын талаар судалсан. Одоо бид n зэргийн язгуур, n зэргийн арифметик язгуурын талаар судлах болно.

Тодорхойлолт. a, b бодит тоо, $n > 1$ натурал тоо. n зэрэгт дэвшүүлэхэд a тоотой тэнцдэг b тоог a тооны n зэргийн язгуур гэнэ.

Жишээ 1. a тооны n зэргийн язгуурыг ол.
а. $a = -32$, $n = 5$ б. $a = 81$, $n = 4$

Бодолт.
а. $(-2)^5 = -32$ тул 5 зэргийн нэг язгууртай. Тэр нь $b = -2$ юм.
б. $(-3)^4 = 81$ ба $3^4 = 81$ тул хоёр ширхэг 4 зэргийн язгууртай. Тэр нь $b = -3$, $b = 3$ юм.

Тодорхойлолт. а) Хэрэв $a \geq 0$ бодит тоо, n тэгш натурал тоо бол a тооны n зэргийн язгуурын сөрөг биш утгыг n зэргийн **арифметик язгуур** гэнэ.

б) Хэрэв a бодит тоо, n сондгой натурал тоо бол n зэргийн язгуурыг **арифметик язгуур** гэнэ. Энэ үед арифметик язгуурыг $\sqrt[n]{a}$ гэж тэмдэглэнэ.

Санамж $n = 2$ үед $\sqrt[2]{a}$-ийг $\sqrt{a}$ гэж тэмдэглэдэг.

Жишээ 2. a тооны n зэргийн арифметик язгуурыг ол.
а. $a = 64$, $n = 2$ б. $a = 625$, $n = 4$ в. $a = -8$, $n = 3$ г. $a = 243$, $n = 5$

Бодолт.
а. 64-ийн квадрат язгуур нь 8 ба −8. Харин арифметик квадрат язгуур нь 8, $\sqrt{64} = 8$.
б. 625-ын дөрвөн зэргийн язгуур нь 5 ба −5. Харин дөрвөн зэргийн арифметик язгуур нь 5, $\sqrt[4]{625} = 5$.
в. $(-2)^3 = -8$ учраас $\sqrt[3]{-8} = -2$, $-2 < 0$ тул арифметик язгуур биш.
г. $3^5 = 243$ учраас $\sqrt[5]{243} = 3$, $3 > 0$ арифметик язгуур мөн.

n тоо нь тэгш ба сондгой байхаас хамаарч дараах дүрэм мөрдөн гардаг.

Дүрэм 1. Хэрэв a дурын бодит тоо, n нь сондгой тоо бол $\sqrt[n]{a^n} = a$ байна.

Дүрэм 2. Хэрэв a дурын бодит тоо, n нь тэгш тоо бол $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ байна.

Жишээ 3. а. $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = |2| = 2$ б. $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$ в. $\sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4$

Жишээ 4. а. (−1000)-ийн куб язгуурыг ол. б. 256-ийн 4 зэргийн язгуурыг ол.

Бодолт. а. $\sqrt[3]{-1000} = \sqrt[3]{(-10)^3} = -10$ б. $\sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{4^4} = |4| = 4$

27. a тооны n зэргийн язгуурыг ол.

а. $a=9,\ n=2$ б. $a=16,\ n=4$ в. $a=-125,\ n=2$ г. $a=1024,\ n=5$

28. a тооны n зэргийн арифметик язгуурыг ол.

а. $a=9,\ n=2$ б. $a=16,\ n=4$ в. $a=-125,\ n=2$ г. $a=1024,\ n=5$

29. Хэрэв кубийн эзлэхүүн а. 27см^3 б. $64\,\text{дм}^3$ в. $0.008\,\text{м}^3$ г. $1000\,\text{мм}^3$ д. $125\,\text{м}^3$ бол ирмэгийн уртыг ол.

30. Илэрхийллийн утгыг ол.

а. $\sqrt{16}$ б. $\sqrt[3]{125}$ в. $8\sqrt[4]{81}$ г. $-2\sqrt[5]{0.00032}$

д. $-3\sqrt[5]{-7^5}$ е. $0.5\sqrt[4]{(-11)^4}$ ё. $\sqrt[3]{-125^2}$ ж. $-2\sqrt[5]{32}$

31. Дараах илэрхийллүүдээс аль нь бодит утгагүй вэ?

а. $\sqrt{-25}$ б. $\sqrt{16}$ в. $\sqrt{-169}$ г. $\sqrt[3]{125}$ д. $\sqrt[4]{81}$ е. $\sqrt[5]{-2}$ ё. $\sqrt[4]{-9^4}$

ж. $\sqrt[4]{-(5)^4}$ з. $\sqrt{\left(-\dfrac{16}{625}\right)^2}$ и. $\sqrt[3]{-6\dfrac{1}{8}}$ й. $\sqrt[3]{-15^2}$ к. $9\sqrt[4]{0}$ л. $-2\sqrt[5]{-1}$

32. Дараах илэрхийлэл бодит утгатай байх x-ийн утга гурвыг ол.

а. $\sqrt{x-1}$ б. $\sqrt[3]{x-125}$ в. $\sqrt[4]{x-81}$ г. $\sqrt[4]{x-9^4}$ д. $\sqrt[6]{x+15^4}$ е. $\sqrt[3]{-6+x}$

33. Хэрэв $x=\sqrt{2}$ бол $\sqrt{(x-5)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^3}$ илэрхийллийн утгыг ол.

n зэргийн язгуурын чанар

Бид өмнөх ангидаа квадрат язгуурын дараах чанаруудыг судалсан.

1. $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}\ ,\left(\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\right)$
2. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}},\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)$
3. $\sqrt{a^k}=\left(\sqrt{a}\right)^k,\left(\left(\sqrt{a}\right)^k=\sqrt{a^k}\right)$

Эдгээр чанарт үндэслэн n зэргийн язгуурын чанарыг авч үзье.

Чанар 1. $n>1$ ба $k>1$ натурал тоо бүрийн хувьд дараах чанар биелнэ.

1. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}\ ,\left(\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\right)$ энд $a\ge 0,\ b\ge 0$
2. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}},\left(\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)$ энд $a>0,\ b>0$
3. $\sqrt[n]{a^k}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^k,\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}\right)$ энд $a\ge 0$
4. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[n\cdot k]{a}\left(\sqrt[n\cdot k]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)$ энд $a\ge 0$
5. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}$ энд $a\ge 0$

Жишээ 1. Дараах илэрхийллийг 1 дүгээр чанар ашиглан хялбарчилж харуулав.

а. $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{7}=\sqrt[3]{4\cdot 7}=\sqrt[3]{28}$

б. $\sqrt[5]{0.05}\cdot\sqrt[5]{20}=\sqrt[5]{0.05\cdot 20}=\sqrt[5]{1}=1$

в. $\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{8\cdot 3}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{3}=2\cdot\sqrt[3]{3}$

Жишээ 2. Дараах илэрхийллийг 2 дугаар чанар ашиглан хялбарчилж харуулав.

а. $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{7}}=\sqrt[3]{\dfrac{4}{7}}$ б. $\dfrac{\sqrt[5]{160}}{\sqrt[5]{15}}=\sqrt[5]{\dfrac{160}{15}}=\sqrt[5]{\dfrac{32}{3}}=\dfrac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{3}}=\dfrac{2}{\sqrt[5]{3}}$

в. $\dfrac{\sqrt[4]{5\frac{1}{7}}}{\sqrt[4]{3}}=\sqrt[4]{\dfrac{5\frac{1}{7}}{3}}=\sqrt[4]{\dfrac{\frac{36}{7}}{3}}=\sqrt[4]{\dfrac{12}{7}}$ г. $\sqrt[3]{1\dfrac{91}{125}}=\sqrt[3]{\dfrac{216}{125}}=\dfrac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{125}}=\dfrac{\sqrt[3]{6^3}}{\sqrt[3]{5^3}}=\dfrac{6}{5}=1.2$

Жишээ 3. Дараах илэрхийллийг 3 дугаар чанар ашиглан хялбарчилж харуулав.

а. $\sqrt[3]{32}=\sqrt[3]{2^5}=\left(\sqrt[3]{2}\right)^5$ б. $\left(\sqrt[5]{3}\right)^{10}=\sqrt[5]{3^{10}}=\sqrt[5]{3^{2\cdot 5}}=\sqrt[5]{\left(3^2\right)^5}=\sqrt[5]{9^5}=9$

Жишээ 4. Дараах илэрхийллийг 4, 5 дугаар чанар ашиглан хялбарчилж харуулав.

а. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}=\sqrt[3\cdot 4]{2}=\sqrt[12]{2}$ б. $\sqrt[10]{9}=\sqrt[5\cdot 2]{9}=\sqrt[5]{\sqrt{9}}=\sqrt[5]{3}$

в. $\sqrt[4]{\sqrt{\sqrt[3]{5}}}=\sqrt[4]{\sqrt[6]{5}}=\sqrt[24]{5}$ г. $\sqrt[3]{\sqrt[2]{\sqrt[7]{64}}}=\sqrt[3]{\sqrt[2\cdot 7]{64}}=\sqrt[3]{\sqrt[7]{\sqrt[2]{64}}}=\sqrt[3]{\sqrt[7]{8}}=\sqrt[7]{\sqrt[3]{8}}=\sqrt[7]{2}$

34. n зэргийн язгуурын чанар ашиглан дараах илэрхийллийг хялбарчил.

а. $\sqrt[3]{\dfrac{27}{125}}$ б. $\sqrt[5]{7\dfrac{19}{32}}$ в. $\sqrt[4]{3\dfrac{13}{81}}$ г. $\dfrac{\sqrt[3]{-54}}{\sqrt[3]{2}}$ д. $\dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{48}}$ е. $\dfrac{\sqrt[5]{14}}{\sqrt[5]{700000}}$

35. n зэргийн язгуурын чанар ашиглан дараах илэрхийллийг хялбарчил.

а. $\sqrt[4]{9}\cdot\sqrt[4]{9}$ б. $\sqrt[5]{27}\cdot\sqrt[5]{9}$ в. $\sqrt[3]{-25}\cdot\sqrt[3]{5}$ г. $\sqrt[3]{18}\cdot\sqrt[3]{-12}$

д. $\dfrac{\sqrt[4]{324}}{\sqrt[4]{4}}$ е. $\dfrac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{2}}$ ё. $\sqrt[4]{162}$ ж. $\sqrt[4]{\dfrac{9}{25}}$ з. $\sqrt{3\dfrac{1}{8}\cdot 1\dfrac{1}{2}}$

и. $\sqrt[5]{3^{10}\cdot 0.5^{15}}$ й. $\sqrt[5]{7^2\cdot 11^4}\cdot\sqrt[5]{7^3\cdot 11}$ к. $\sqrt[3]{3+\sqrt{17}}\cdot\sqrt[3]{3-\sqrt{17}}$

36. Хэрэв $x\geq 0$, $y>0$ бодит тоо бол дараах илэрхийллийг хялбарчил.

а. $\sqrt[5]{xy}-3\sqrt[5]{xy}$ б. $\sqrt[4]{16x^4y^{12}}$ в. $15\sqrt{x^5y^2}-7x^2y\sqrt{x}$ г. $\sqrt[5]{\dfrac{x^5}{32y^{15}}}$

37. Язгуурын тэмдгийн өмнө үржигдэхүүн гарга.

а. $\sqrt{121a},\ a\geq 0$ б. $\sqrt{72b},\ b\geq 0$ в. $\sqrt[3]{27y},\ y\geq 0$ г. $\sqrt[4]{32c^9},\ c\geq 0$

д. $\sqrt[3]{125a^4},\ a\geq 0$ е. $\sqrt[4]{162b^6},\ b\geq 0$ ё. $\sqrt[6]{10^7y^8},\ y\geq 0$ ж. $\sqrt{12x^3},\ x\geq 0$

38. Эерэг үржигдэхүүнийг язгуурын тэмдгийн доор оруул.

а. $8\sqrt{3}$ б. $-3\sqrt{7}$ в. $-2\sqrt[3]{2}$ г. $-3\cdot\sqrt[4]{\dfrac{1}{9}}$

д. $-2\cdot\sqrt[5]{\dfrac{1}{8}}$ е. $x\sqrt[4]{5},\ x<0$ ё. $y\sqrt[4]{3},\ y<0$ ж. $b\sqrt{13},\ b<0$

39. Хэрэв $x>0$, $y>0$ бодит тоо бол дараах илэрхийллийг хялбарчил.

а. $\sqrt{5x}\cdot\sqrt{20x^3}$ б. $\dfrac{\sqrt{3xy^3}\cdot\sqrt{2x^2y}}{\sqrt{6x^3y^4}}$ в. $(\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{9})^2$ г. $\left(\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt{10}\right)^4$

д. $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}}$ е. $\sqrt{\sqrt[3]{x}}$ ё. $\sqrt[3]{\sqrt{x^6}}$ ж. $\sqrt{\sqrt{x^6}}$

40. Тооны машин ашиглан илэрхийллийн утга ямар тэмдэгтэй болохыг тодорхойл.

а. $\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}$ б. $\sqrt[3]{3}-\sqrt[4]{5}$ в. $\sqrt[4]{4}-2\sqrt[5]{5}$ г. $\sqrt[5]{4}-\sqrt[6]{6}$

41. Тооны машин ашиглахгүйгээр жиш.

а. $2\sqrt{5}$ ба $\sqrt{45}$ б. $\sqrt{18}$ ба $3\sqrt{2}$ в. $5\sqrt{3}$ ба $\sqrt{76}$

г. $3\sqrt[4]{2}$ ба $\sqrt{163}$ д. $2\sqrt[3]{3}$ ба $\sqrt[3]{25}$ е. $2\sqrt[3]{3}$ ба $3\sqrt[3]{0.88}$

42. Язгуурын тэмдэг доор оруулж хялбарчил. Энд *a, b, x, y* тоонууд нь тэгээс эрс их бодит тоо.

а. $ab\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}$ б. $2xy\cdot\sqrt{\frac{3x}{2y}}$ в. $\frac{a}{b}\cdot\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}}$ г. $\frac{x}{y^2}\cdot\sqrt[4]{\frac{y^5}{x^3}}$

43. $0<a<1$ үед $(a-1)\sqrt{\frac{3a}{1-a^2}}=-\sqrt{\frac{3a(1-a)}{1+a}}$ тэнцэтгэлийг батлаарай. $a=\frac{1}{2}$ үед тэнцэтгэлийг шалга.

44. Бутархайн хуваарийг язгуураас чөлөөл. Энд *a, b, x, y, m, n* тоонууд нь тэгээс эрс их бодит тоо.

а. $x\cdot\sqrt{\frac{x}{y}}$ б. $n\cdot\sqrt[3]{\frac{m}{n}}$ в. $b\cdot\sqrt[4]{\frac{a}{b^3}}$ г. $y\cdot\sqrt[5]{\frac{x^2}{y^3}}$

д. $6n\cdot\sqrt{\frac{m}{2n}}$ е. $\frac{4a}{3m}\cdot\sqrt[3]{\frac{3m}{2a}}$ ё. $15mn\cdot\sqrt[4]{\frac{a^3m}{27m^2n^3}}$

45. Давхар язгууртай илэрхийллийг дан язгууртай болго.

а. $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}}$ б. $\sqrt{\sqrt[3]{4}}$ в. $\sqrt[3]{\sqrt{5^9}}$ г. $\sqrt{\sqrt{49^6}}$ к. $\sqrt{\sqrt{5\frac{1}{16}}}$ е. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{16}}$

ё. $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{4^{15}}}}$ ж. $\sqrt[6]{\sqrt{\sqrt{81^6}}}$ з. $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{256}}}$ и. $\sqrt[5]{\sqrt[3]{-243}}$ й. $\sqrt[3]{\sqrt{0.16^9}}$

2.3. РАЦИОНАЛ ТООН ИЛТГЭГЧТЭЙ ЗЭРЭГ

Сэргээн санах. Хэрэв $k\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}$ бол $\frac{k}{n}$ хэлбэрт бичиж болдог тоог рационал тоо гэнэ.

Тодорхойлолт. $k\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$ бөгөөд $a>0$ дурын бодит тооны хувьд $\sqrt[n]{a^k}$ тоог $a^{\frac{k}{n}}$ гэж тэмдэглэдэг. Тодруулбал $a^{\frac{k}{n}}=\sqrt[n]{a^k}$ байна.

Тухайлбал: $5^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{5^2},\ 3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3^1}=\sqrt{3},\ \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{4}{7}}=\sqrt[7]{\left(\frac{3}{5}\right)^4},\ \sqrt[4]{11^3}=11^{\frac{3}{4}},\ \sqrt{2^5}=2^{\frac{5}{2}}$

$\sqrt{14}=14^{\frac{1}{2}},\ \sqrt[9]{0.6^5}=0.6^{\frac{5}{9}},\ \sqrt[5]{2^{-3}}=2^{\frac{-3}{5}},\ 18^{-\frac{2}{3}}=18^{\frac{-2}{3}}=\sqrt[3]{18^{-2}},\ (\sqrt{3})^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{(\sqrt{3})^2}=\sqrt[5]{3}$

Жишээ 1. Дараах илэрхийллийн утгыг рационал тоон илтгэгчтэй зэргийн тодорхойлолт ашиглан бодов.

а. $36^{\frac{1}{2}}=\sqrt{36}=6$ б. $-64^{\frac{1}{3}}=-\sqrt[3]{64}=-\sqrt[3]{4^3}=-4$

в. $36^{\frac{3}{2}}=\sqrt{36^3}=\sqrt{6^6}=6^3=216$ г. $27^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{27^4}=3^4=81$

д. $8^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{8^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{8^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2^6}}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$ е. $\left(\sqrt[4]{5}\right)^3=\left(5^{\frac{1}{4}}\right)^3=5^{\frac{3}{4}}$

ё. $\frac{1}{\sqrt[6]{40}}=\frac{1}{40^{\frac{1}{6}}}=40^{-\frac{1}{6}}$ ж. $7^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{7^2}=\sqrt[5]{49}$

Чанар 2. Дурын $a>0$, $b>0$ тоо болон аливаа m, n рационал тооны хувьд дараах чанарууд биелнэ.
1. $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ 2. $a^m:a^n=a^{m-n}$ 3. $\left(a^m\right)^n=a^{m\cdot n}$
4. $(ab)^m=a^m\cdot b^m$ 5. $\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$.

Жишээ болгон $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ чанарыг баталъя.

m,n рационал тоо тул $k_1,k_2\in\mathbb{Z}$, $t_1, t_2\in\mathbb{N}$ тооны хувьд $m=\frac{k_1}{t_1}$, $n=\frac{k_2}{t_2}$ байна.

t_1, t_2 тооны хамгийн бага ерөнхий хуваагдагчийг нь t гэвэл $m=\frac{k}{t}$, $n=\frac{s}{t}$ хэлбэртэй бичиж болно.

Тэгвэл $a^m\cdot a^n=a^{\frac{k}{t}}\cdot a^{\frac{s}{t}}=\sqrt[t]{a^k}\cdot\sqrt[t]{a^s}=\sqrt[t]{a^k\cdot a^s}=\sqrt[t]{a^{k+s}}=a^{\frac{k+s}{t}}=a^{\frac{k}{t}+\frac{s}{t}}=a^{m+n}$ батлагдлаа.

Жишээ болгон $a^m:a^n=a^{m-n}$ чанарыг баталъя. m,n рационал тоо тул $k_1,k_2\in\mathbb{Z}$, $t_1, t_2\in\mathbb{N}$ тооны хувьд $m=\frac{k_1}{t_1}$, $n=\frac{k_2}{t_2}$ байна.

Энд t_1, t_2 тоонуудын хамгийн бага ерөнхий хуваагдагчийг нь t гэвэл $m=\frac{k}{t}$, $n=\frac{s}{t}$ хэлбэртэй бичиж болно.

Тэгвэл $a^m:a^n=a^{\frac{k}{t}}:a^{\frac{s}{t}}=\sqrt[t]{a^k}:\sqrt[t]{a^s}=\sqrt[t]{a^k:a^s}=\sqrt[t]{a^{k-s}}=a^{\frac{k-s}{t}}=a^{\frac{k}{t}-\frac{s}{t}}=a^{m-n}$ болж батлагдлаа.
Бусад чанарыг үүний адилаар баталж болно.
Одоо бүхэл тоон илтгэгчтэй зэргийн чанарыг рационал тоон илтгэгчтэй зэргийн хувьд биелэхийг жишээгээр харуулъя.

Илэрхийлэл	Рационал тоон илтгэгчтэй зэргийн тодорхойлолт ашигласан бодолт	Зэргийн чанар ашигласан бодолт
$5^{\frac{1}{2}}\cdot5^{\frac{3}{2}}$	$5^{\frac{1}{2}}\cdot5^{\frac{3}{2}}=\sqrt{5^1}\cdot\sqrt{5^3}=\sqrt{5\cdot5^3}=\sqrt{5^4}=5^2$	$5^{\frac{1}{2}}\cdot5^{\frac{3}{2}}=5^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}=5^2$
$7^{\frac{5}{2}}:7^{\frac{3}{2}}$	$7^{\frac{5}{2}}:7^{\frac{3}{2}}=\sqrt{7^5}:\sqrt{7^3}=\sqrt{7^5:7^3}=\sqrt{7^2}=7$	$7^{\frac{5}{2}}:7^{\frac{3}{2}}=7^{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}=7$
$\left(5^{\frac{2}{7}}\right)^{\frac{2}{3}}$	$\left(5^{\frac{2}{7}}\right)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\left(5^{\frac{2}{7}}\right)^2}=\sqrt[3]{5^{\frac{2}{7}\cdot2}}=\sqrt[3]{5^{\frac{4}{7}}}=5^{\frac{4}{7}:3}=5^{\frac{\frac{4}{7}}{3}}=5^{\frac{4}{21}}$	$\left(5^{\frac{2}{7}}\right)^{\frac{2}{3}}=5^{\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{3}}=5^{\frac{4}{21}}$

Жишээ 2. Зэргийн чанар ашиглан бод.

а. $7^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{3}{2}} = 7^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = 7^{\frac{4}{2}} = 7^2 = 49$

б. $\left(3^{\frac{3}{2}}\right)^2 = 3^{\frac{3}{2}\cdot 2} = 3^3 = 27$

в. $(9\cdot 4)^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{4} = 3\cdot 2 = 6$

г. $16^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{16^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{16}} = \dfrac{1}{4}$

д. $\dfrac{5^{\frac{3}{2}}}{5^{\frac{1}{2}}} = 5^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = 5^1 = 5$

е. $\left(\dfrac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \dfrac{8^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \dfrac{2}{3}$

Жишээ 3. $81^{0.75}\cdot 32^{-0.4} - 8^{-\frac{2}{3}}\cdot 27^{\frac{1}{3}} + 256^{0.5}$ илэрхийллийн утгыг ол.

Бодолт.

$81^{0.75}\cdot 32^{-0.4} - 8^{-\frac{2}{3}}\cdot 27^{\frac{1}{3}} + 256^{0.5} = \left(3^4\right)^{0.75}\cdot\left(2^5\right)^{-0.4} - \left(2^3\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(3^3\right)^{\frac{1}{3}} + \left(2^8\right)^{0.5}$

$= 3^3\cdot 2^{-2} - 2^{-2}\cdot 3 + 2^4 = \dfrac{27}{4} - \dfrac{3}{4} + 16 = \dfrac{24}{4} + 16 = 22$

Дараах илэрхийллийг рационал тоон илтгэгчтэй зэргийн чанар ашиглан хялбарчил.

46. $10^{\frac{3}{5}}\cdot 2^{-0.6} : 5^{-1.4}$

47. $15^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{3}{4}} : 5^{-\frac{1}{3}}$

48. $b^{\frac{5}{6}}\cdot b^{\frac{1}{2}} : b^{\frac{2}{3}}$

49. $a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{5}{6}} : a^{-\frac{2}{3}}$

50. $3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{-\frac{2}{3}} : 3^{-\frac{5}{6}}$

51. $x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{2}{3}} : x^{-\frac{5}{6}}$

52. $\left(8^{\frac{1}{6}}\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(8^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{6}}$

53. $\left(y^{\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{4}{5}}\cdot\left(y^{-4}\right)^{\frac{1}{10}}$

54. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{81}} + \sqrt[3]{125^2}$

55. $\dfrac{1}{\sqrt{9}} + \sqrt[4]{16}$

56. $\dfrac{1}{\sqrt{25}} + \sqrt[4]{16^3}$

57. $\left(125x^{-9}\right)^{-\frac{2}{3}}$

58. $\left(32x^{-10}\right)^{-\frac{3}{5}}$

59. $\left(64c^{-6}\right)^{-\frac{2}{3}}$

60. $\left(81a^{-8}\right)^{-\frac{3}{4}}$

61. $\left(27x^{-3}\right)^{-\frac{2}{3}}$

62. $\left(64b^{-6}\right)^{-\frac{5}{6}}$

63. $\left(16a^{-4}\right)^{-\frac{3}{4}}$

64. $\left(27b^{-6}\right)^{-\frac{3}{4}}$

65. $\left(64x^{-3}\right)^{-\frac{1}{3}}$

66. $\left(45^{\frac{3}{8}}\cdot 3^{-\frac{1}{8}}\right) : \left(5^{-\frac{1}{4}}\cdot 15^{-\frac{5}{8}}\right)$

67. $\left(24^{\frac{5}{6}}\cdot 6^{-\frac{1}{3}}\right) : \left(3^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{-\frac{7}{6}}\right)$

68. $\left(12^{\frac{3}{4}}\cdot 2^{-0.5}\right) : 3^{-\frac{1}{4}}$

69. $127^0 + 0.0081^{\frac{1}{4}} - \left(9^{-0.4} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \;\; 3^{\frac{4}{5}}\right)^{-2} + \left(1\frac{61}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$

70. $0.0625^{0,25} + (-2)^{-2} - (7 + 2^{-1})^0 + \left(25^{-0.4} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{4}{5}}\right)^2$

71. $\dfrac{\sqrt[6]{b^3 \cdot \sqrt{b^3}}}{b^{-\frac{1}{4}}}$

72. $\dfrac{\sqrt[4]{x^3 \cdot \sqrt[3]{x}}}{x^{-\frac{1}{3}}}$

73. $\dfrac{\sqrt[6]{b \cdot \sqrt[3]{b^{-1}}}}{b^{-\frac{2}{3}}}$

74. $\dfrac{\sqrt[5]{a^2 \cdot \sqrt[4]{a^{-7}}}}{a^{-\frac{3}{4}}}$

75. $\dfrac{\sqrt[6]{x \cdot \sqrt[3]{x}}}{x^{-\frac{7}{9}}}$

76. $\dfrac{\sqrt[5]{x^{-2} \cdot \sqrt{x^{-3.5}}}}{x^{-1.5}}$

77. $\dfrac{\sqrt{a^5 \cdot \sqrt[3]{a^{-1}}}}{a^{-\frac{2}{9}}}$

78. $\dfrac{\sqrt[8]{x \cdot \sqrt[4]{x^{12}}}}{x^{-\frac{1}{2}}}$

79. $\dfrac{\sqrt[14]{a \cdot \sqrt[3]{a^4}}}{a^{-\frac{2}{3}}}$

2.4. СТАНДАРТ ХЭЛБЭРЭЭР БИЧСЭН ТООНЫ ҮЙЛДЭЛ

Маш бага болон маш их тоон хэмжээг тэмдэглэх хэрэгцээ шаардлага байдаг бөгөөд физикийн шинжлэх ухаанд протоны массыг $1.67 \cdot 10^{-27}$ кг, электроны массыг $9.1 \cdot 10^{-31}$ кг, гэрлийн хурдыг 299 792 458 м/с $\approx 2.99 \cdot 10^8$ гэх мэтээр тэмдэглэсэн байдаг. Ийм хэлбэрээр бичсэн тоонуудын хувьд үйлдэл хийх аргатай танилцъя.

Сэргээн санах. Аливаа тоог аравтын бутархай хэлбэрт оруулж бичээд түүнийгээ цэгээс өмнө тэгээс ялгаатай нэг орон үлдэж байхаар 10-ын зэргээр үржүүлж бичсэн хэлбэрийг стандарт хэлбэрт оруулж бичих гэж хэлнэ.

Тухайлбал: $42857 = 4.2857 \cdot 10^4$, $235.561 = 2.35561 \cdot 10^2$

$0.024157 = 2.4157 \cdot 10^{-2}$, $\dfrac{253}{4} = 63.25 = 6.325 \cdot 10^1$

Стандарт хэлбэрээр бичсэн тооны нэмэх үйлдэл

Жишээ 1.

$2.6 \cdot 10^5 + 3.7 \cdot 10^6 = 10^6 \cdot \left(2.6 \cdot 10^{-1} + 3.7\right) = \left(0.26 + 3.7\right) \cdot 10^6 = 3.96 \cdot 10^6$

Жишээ 2.

$1.6 \cdot 10^{-2} + 8.12 \cdot 10^{-1} = 10^{-1} \cdot \left(1.6 \cdot 10^{-1} + 8.12\right) = \left(0.16 + 8.12\right) \cdot 10^{-1} = 8.28 \cdot 10^{-1}$

Стандарт хэлбэрээр бичсэн тооны хасах үйлдэл

Жишээ 3.

$1.65 \cdot 10^4 - 4.7 \cdot 10^3 = 10^4 \cdot \left(1.65 - 4.7 \cdot 10^{-1}\right) = 10^4 \cdot \left(1.65 - 0.47\right) = 1.18 \cdot 10^4$

Жишээ 4.

$8.5 \cdot 10^{-3} - 2.7 \cdot 10^{-2} = 10^{-2} \cdot \left(8.5 \cdot 10^{-1} - 2.7\right) = 10^{-2} \cdot \left(0.85 - 2.7\right) = -1.85 \cdot 10^{-2}$

Стандарт хэлбэрээр бичсэн тооны үржүүлэх үйлдэл

$6.2 \cdot 10^5 \cdot 7.3 \cdot 10^6 = 10^{11} \cdot \left(6.2 \cdot 7.3\right) = 45.26 \cdot 10^{11} = 4.526 \cdot 10 \cdot 10^{11} = 4.526 \cdot 10^{12}$

Стандарт хэлбэрээр бичсэн тооны хуваах үйлдэл

$$2.75\cdot10^3:\left(5.5\cdot10^5\right)=\frac{2.75\cdot10^3}{5.5\cdot10^5}=\frac{2.75}{5.5}\cdot10^{-2}=0.5\cdot10^{-2}=5.0\cdot10^{-1}\cdot10^{-2}=5.0\cdot10^{-3}$$

Стандарт хэлбэрээр бичсэн тооны үйлдлийг гүйцэтгэ.

80. $2.5\cdot10^4+9.6\cdot10^5$

81. $7.15\cdot10^2-3.11\cdot10^3$

82. $-8.1\cdot10^6+5.6\cdot10^5$

83. $7.88\cdot10^2-1.33\cdot10^1$

84. $6.5\cdot10^{-4}+5.61\cdot10^{-5}$

85. $1.75\cdot10^{-2}-8.9\cdot10^{-3}$

86. $-1.1\cdot10^{-6}+7.75\cdot10^{-5}$

87. $5.44\cdot10^2-1.65\cdot10^{-1}$

88. $1.5\cdot10^4\cdot1.6\cdot10^5$

89. $7.25\cdot10^2:\left(5.0\cdot10^3\right)$

90. $1.44\cdot10^4:\left(4.8\cdot10^3\right)$

91. $2.25\cdot10^{-2}\cdot4.2\cdot10^{-3}$

92. $1.35\cdot10^{-2}\cdot1.26\cdot10^5$

93. $7.88\cdot10^{-15}:\left(1.6\cdot10^{-18}\right)$

94. $8.45\cdot10^4\cdot4.8\cdot10^3$

95. $2.4\cdot10^{-2}\cdot1.2\cdot10^3$

96. Дараах тоог стандарт хэлбэртэй болгон бичиж, үйлдлийг гүйцэтгэ.

а. 456 · 250000000 б. 0.000265 · 488 в. 0.125 · 125000
г. 0.00144 : 6400 д. 0.5 · 58000 е. 0.00144 : 10240000
ё. 65 · 8600000 ж. 0.000225 : 0.0000000045

2.5. БОДИТ ТООНЫ ҮЙЛДЛИЙН ЧАНАР

Та бүхэн I ангиасаа эхлэн натурал, бүхэл, аравтын бутархай, энгийн бутархай тооны үйлдэл болон түүний чанарыг үзсэн.
Сэргээн санах. a нь бүхэл тоо, b нь натурал тоо бол $\frac{a}{b}$ хэлбэрийн тоог **рационал тоо** гэнэ.
Рационал тоог аравтын бутархай хэлбэрээр бичихэд төгсгөлөг буюу төгсгөлгүй үет аравтын бутархай болдог. Гэтэл зарим тоо төгсгөлгүй, үегүй аравтын бутархай хэлбэртэй бичигддэг. Тухайлбал. $\sqrt{2},\sqrt[3]{5},\pi=3.14...,\ e=2.71...$
Сэргээн санах. Төгсгөлгүй, үегүй аравтын бутархай хэлбэрт бичигддэг тоог **иррационал тоо** гэнэ.

Тодорхойлолт. Рационал болон иррационал тоог нийтэд нь **бодит тоо** гэж нэрлэдэг.

Бүхэл болон рационал тоон дээрх нэмэх ба үржүүлэх үйлдлийн бүх чанар нь бодит тоон дээр мөн адил бүгд биелнэ.

Чанар 3.

1. $a+b=b+a$ нэмэх үйлдлийн байр солих чанар
2. $(a+b)+c=a+(b+c)$ бүлэглэх чанар
3. $a+0=0+a=a$ тэгийн чанар
4. $a+b=b+a=0$ байх b тоо олдоно. Уг b тоог a тооны эсрэг тоо гээд $b=-a$ гэж тэмдэглэнэ.
5. $a\cdot b=b\cdot a$ үржүүлэх үйлдлийн байр солих чанар

6. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ үржүүлэхийн бүлэглэх чанар
7. $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ нэгжийн чанар
8. Хэрэв $a \neq 0$ бол $a \cdot b = b \cdot a = 1$ байх b гэсэн бодит тоо олдоно. Уг b тоог a тооны урвуу тоо гээд $b = a^{-1}$ гэж тэмдэглэнэ.
9. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ хаалт задлах чанар
10. $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ тэгээр үржүүлэхийн чанар
11. $a \cdot (-b) = a \cdot (-b) = -a \cdot b$
12. $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

БҮЛГИЙН НЭМЭЛТ ДААЛГАВАР

1. $(0.5)^{-4} + 16^{0.5} - (0.0625)^{-0.75} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{-0.5}$

2. $0.008^{-\frac{1}{3}} \cdot 125^{\frac{2}{3}} - \left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} : 2.5^{-2} \cdot 0.75^{-1}$

3. $\left[\left(2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right) : 4^{\frac{1}{6}}\right]\left\{\left[4^{-\frac{1}{2}} : \left(2^{-\frac{1}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}}\right)\right] \cdot \left[\left(2^{-\frac{5}{6}} \cdot 4^{-\frac{2}{3}}\right) : 3^{\frac{5}{6}}\right]\right\}$

4. $\left\{3^{\frac{5}{2}} \cdot 5^{\frac{4}{2}} \cdot 2^{\frac{5}{4}} \cdot \left[16 : \left(27^{-1} \cdot 5^{-\frac{5}{3}}\right)\right] \cdot \left(25 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}\right)\right\}^{\frac{1}{5}}$

5. $10^2 \cdot 1000^{-\frac{2}{3}} - \left(100^{-\frac{1}{2}} - 0.027^{-\frac{1}{3}}\right) - \left[625^{-0.75} + \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2\right]$

6. $\left[\left(27\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(8\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right] - \left[\frac{2}{7} \cdot (343\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} - 10 \cdot \left(0.001\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$

7. $\dfrac{2^{\frac{4}{3}} - 8 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{3}}{2^{\frac{2}{3}} + 2\sqrt[3]{2\sqrt{3}} + 4\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{2}{3}}} : \left(1 - 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right) - 2^{\frac{2}{3}}$

8. $\left(2^{1.5} + 3^{1.5} : (-1) - 2 : \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) - \dfrac{3}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}\right) : \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$

9. $\left(\left(\dfrac{2^{1.5} + 27}{\sqrt{2} + 3} + 3\sqrt[10]{32} - 2\right) \cdot \dfrac{1}{9}\right)^5$

10. $\sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[4]{3 \cdot \sqrt{3}}} : \left(\sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[4]{3}}} : \sqrt[4]{\sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}$

11. $\left(\sqrt[3]{16 \cdot \sqrt[4]{8 \cdot \sqrt{2}}}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{32 \cdot \sqrt[4]{2}} \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt[4]{4 \cdot \sqrt[3]{4}}}$

12. Дараах стандарт хэлбэрээр өгсөн тооны үйлдлийг гүйцэтгэ. Гарсан хариуг стандарт хэлбэртэй болгон бич.

а. $7.5 \cdot 10^4 + 9.62 \cdot 10^6$

б. $5.72 \cdot 10^4 \cdot 3.11 \cdot 10^5$

в. $-3.1 \cdot 10^{13} : \left(5.6 \cdot 10^{12}\right)$

г. $7.88 \cdot 10^8 - 1.33 \cdot 10^9$

III БҮЛЭГ. АЛГЕБРЫН ИЛЭРХИЙЛЭЛ

Энэ бүлэг сэдвийг судалснаар дараах мэдлэг, чадварыг эзэмшинэ.

- *Рационал тоон илтгэгчтэй зэрэг бүхий алгебрын илэрхийллийг хялбарчлах*
- *Алгебрын илэрхийллийг бүлэглэж үржигдэхүүн болгон задлах, квадрат гурван гишүүнтийг хоёр олон гишүүнтийн үржвэр болгох*
- *Алгебрын бутархайн үржүүлэх, хуваах үйлдлийг гүйцэтгэх*
- *Алгебрын бутархайн нэмэх, хасах үйлдлийг гүйцэтгэх.*

3.1. РАЦИОНАЛ ТООН ИЛТГЭГЧТЭЙ ЗЭРЭГ БҮХИЙ АЛГЕБРЫН ИЛЭРХИЙЛЭЛ

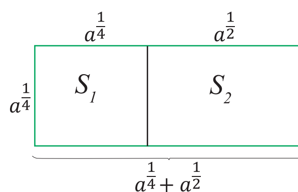
Бид өмнө нь бүхэл илтгэгчтэй алгебрын илэрхийллийн хаалт задлах, төсөөтэй гишүүдийг эмхэтгэх, үржигдэхүүн болгон задлахыг сурсан.
Мөн тооны натурал тоон илтгэгчтэй зэргийн бүх чанар рационал тоон илтгэгчтэй зэргийн хувьд биелэхийг судалсан.

Тодорхойлолт. Хувьсагчийн рационал тоон илтгэгчтэй зэрэг агуулсан илэрхийллийг рационал тоон илтгэгчтэй алгебрын илэрхийлэл гэнэ.

Жишээлбэл: $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}, 5b^{\frac{2}{3}}, a-a^{\frac{1}{2}}$ гэх мэт.

Рационал тоон илтгэгчтэй зэрэг агуулсан алгебрын илэрхийллийн ижил суурьтай, тэнцүү илтгэгчтэй нэмэгдэхүүнүүдийг төсөөтэй гишүүд гэнэ. Жишээ нь: $x^{0.5}+2x^{0.5}-x$ илэрхийллийн $x^{0.5}, 2x^{0.5}$ гишүүдийг төсөөтэй гишүүд гэх ба эдгээр нь зөвхөн коэффицентоороо ялгаатай. Харин x гэсэн гишүүний зэрэг нь нэгтэй тэнцүү тул $x^{0.5}$ гишүүнтэй төсөөтэй гишүүн болохгүй. Иймд төсөөтэй гишүүдийг эмхэтгэвэл $x^{0.5}+2x^{0.5}=x^{0.5}(1+2)=3x^{0.5}$ болох ба дээрх илэрхийллийг хялбарчилбал $\underline{x^{0.5}}+\underline{2x^{0.5}}-x=3x^{0.5}-x$ байна.

Жишээ 1. $a^{\frac{1}{4}}$ талтай квадрат, $a^{\frac{1}{4}}$ ба $a^{\frac{1}{2}}$ талуудтай тэгш өнцөгтөөс үүсэх нийлмэл дүрсийн талбайг олъё.



Бодолт. Нийлмэл дүрсийн талбайг S гэе. Тэгвэл $S=S_1+S_2$ болно.

Квадратын талбай $S_1=(a^{\frac{1}{4}})^2$, тэгш өнцөгтийн талбай $S_2=a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{1}{2}}$ тул бидний олох дүрсийн талбай нь $S=S_1+S_2=(a^{\frac{1}{4}})^2+a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{4}\cdot 2}+a^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{3}{4}}$ болно. Энд төсөөтэй гишүүн байхгүй байна. Энэ дүрсийн талбайг мөн $S=a^{\frac{1}{4}}(a^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{2}})$ гэж олж болно. Дүрсийн талбайг хоёр янзаар олоход гарсан илэрхийллүүд нь тэнцүү байна. Тухайлбал: $a^{\frac{1}{4}}(a^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{2}})=(a^{\frac{1}{4}})^2+a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{4}\cdot 2}+a^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{3}{4}}$ ба

$a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{3}{4}}=(a^{\frac{1}{4}})^2+a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{4}}(a^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{2}})$ байна.

Рационал тоон илтгэгчтэй алгебрын илэрхийлэлд ерөнхий үржигдэхүүн хаалтын өмнө гаргах, хаалт задлах хууль биелнэ.

Жишээ 2. Илэрхийллийг хялбарчил.

а. $\left(m^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(m^{\frac{1}{2}}+1\right)$ б. $\left(3x^{\frac{1}{3}}-2\right)^2$ в. $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$

Бодолт.

а. Энэ илэрхийллийг $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ томьёог ашиглан хялбарчилбал $\left(m^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(m^{\frac{1}{2}}+1\right)=\left(m^{\frac{1}{2}}\right)^2-1^2=m^{\frac{1}{2}\cdot 2}-1=m-1$ болно.

б. $\left(3x^{\frac{1}{3}}-2\right)^2$ илэрхийллийг $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ ялгаврын квадратын томьёог ашиглан $\left(3x^{\frac{1}{3}}-2\right)^2=\left(3x^{\frac{1}{3}}\right)^2-2\cdot 3x^{\frac{1}{3}}\cdot 2+2^2=9x^{\frac{2}{3}}-12x^{\frac{1}{3}}+4$ гэж бичиж болно.

в. $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2=x-y$

Жишээ 3. $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$ илэрхийллийг хялбарчил.

Бодолт. Бутархайн хүртвэрийг үржигдэхүүн болгон задалж, хураавал

$$\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}=\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}=\frac{\cancel{\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)}\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)}{\cancel{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}}=a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$$ илэрхийлэл гарна.

Жишээ 4. $3y^{\frac{1}{3}}\left(y^{\frac{2}{3}}+y^{-\frac{1}{3}}\right)-y\left(3-y^{-\frac{1}{2}}\right)$ илэрхийллийг хялбарчил.

Бодолт. Хаалтыг задалж төсөөтэй гишүүдийг эмхэтгэвэл

$$3y^{\frac{1}{3}}\left(y^{\frac{2}{3}}+y^{-\frac{1}{3}}\right)-y\left(3-y^{-\frac{1}{2}}\right)=3y^{\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{2}{3}}+3y^{\frac{1}{3}}\cdot y^{-\frac{1}{3}}-3y+y\cdot y^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=3y^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}+3y^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}-3y+y^{1-\frac{1}{2}}=\cancel{3y}+3y^0-\cancel{3y}+y^{\frac{1}{2}}=3+y^{\frac{1}{2}}$$ болно.

Жишээ 5. $\dfrac{\sqrt{c}+\sqrt{d}}{\sqrt{c}-\sqrt{d}}$ бутархайн хуваарийг язгуураас чөлөөл.

Бодолт. $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ томьёог ашиглан бутархайн хуваарийг $\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)$ илэрхийллээр үржүүлбэл $\left(\sqrt{c}-\sqrt{d}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)=\left(\sqrt{c}\right)^2-\left(\sqrt{d}\right)^2=c-d$ болно. $\sqrt{c}+\sqrt{d}$ илэрхийллийг $\sqrt{c}-\sqrt{d}$ илэрхийллийн хосмог гэж нэрлэдэг. Иймд

$$\frac{\sqrt{c}+\sqrt{d}}{\sqrt{c}-\sqrt{d}}=\frac{\sqrt{c}+\sqrt{d}}{\sqrt{c}-\sqrt{d}}\cdot\frac{\sqrt{c}+\sqrt{d}}{\sqrt{c}+\sqrt{d}}=\frac{\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^2}{\left(\sqrt{c}\right)^2-\left(\sqrt{d}\right)^2}=\frac{\left(\sqrt{c}\right)^2+2\sqrt{c}\sqrt{d}+\left(\sqrt{d}\right)^2}{c-d}=\frac{c+2\sqrt{cd}+d}{c-d}$$

болж хуваарь язгуур агуулсан илэрхийлэлгүй болов.

1. Илэрхийллийн төсөөтэй гишүүдийг эмхэтгэж, илэрхийллийг хялбарчил.

а. $\sqrt{5}+3\sqrt{5}-4\sqrt{5}$

б. $\sqrt[6]{y}-2\sqrt[6]{y}+y^{\frac{1}{6}}$

в. $4x^{0.5}+2x^{1.5}-3x^{0.5}$

г. $\sqrt[6]{y}\cdot\sqrt[3]{y}-2y^{\frac{1}{2}}+5y^{0.5}$

д. $-b\sqrt[3]{b}+3b\sqrt{b}+2b\sqrt[3]{b}$

е. $(x+y)^2:\sqrt[4]{x+y}\,(x+y)^{\frac{7}{4}}$

2. Илэрхийллийг хялбарчил.

а. $y^{\frac{1}{2}}\left(1-y^{\frac{3}{2}}\right)$

б. $a^{\frac{1}{2}}(a+3)$

в. $\left(a^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}c^2\right)a^{\frac{1}{2}}c$

г. $x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}\right)$

д. $\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$

е. $2\sqrt[3]{a}\left(a^{\frac{2}{3}}-1\right)$

ё. $(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)$

ж. $\left(\frac{1}{2}c^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(\frac{1}{2}c^{\frac{1}{2}}+1\right)$

з. $(\sqrt{x}+\sqrt{5})^2$

и. $(4\sqrt{a}-3\sqrt{b})^2$

й. $\sqrt[3]{m}\left(\sqrt[3]{m^2}-\sqrt[3]{m^5}\right)$

к. $\sqrt[4]{b}\left(\sqrt[4]{b^3}-\sqrt[4]{b^7}\right)$

3. Дараах бутархайн хуваарийг язгуураас чөлөөл.

а. $\frac{4}{\sqrt{2}+3}$

б. $\frac{-1}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}$

в. $\frac{6}{\sqrt{a}-5\sqrt{b}}$

г. $\frac{-4}{3\sqrt{b}-2\sqrt{z}}$

д. $\frac{\sqrt{c}-\sqrt{d}}{\sqrt{c}+\sqrt{d}}$

е. $\frac{x-5}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}$

ё. $\frac{y-2}{\sqrt{y}-\sqrt{2}}$

ж. $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2\sqrt{a}+3\sqrt{b}}$

з. $\frac{a-16}{\sqrt{a}+4}$

4. Илэрхийллийн хаалтыг задалж төсөөтэй гишүүдийг эмхэтгэн хялбарчил.

а. $(\sqrt{a}-2\sqrt{b})^2+4\sqrt{ab}$

б. $10z^{\frac{1}{2}}+\left(5-z^{\frac{1}{2}}\right)^2-\text{z}$

в. $(\sqrt{c}-5\sqrt{d})(c+5\sqrt{cd}+25d)$

г. $(\sqrt[3]{y}+2)(\sqrt[3]{y}-3)$

д. $\left(4+x^{\frac{1}{5}}\right)\left(5+x^{\frac{1}{5}}\right)$

е. $(\sqrt{q}+2\sqrt{p})(q-2\sqrt{pq}+4p)$

ё. $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2-2$

ж. $\frac{(\sqrt{k}-\sqrt{3})(\sqrt{k}+\sqrt{3})}{k^2-9}$

3.2. АЛГЕБРЫН ИЛЭРХИЙЛЛИЙГ ҮРЖИГДЭХҮҮН БОЛГОН ЗАДЛАХ

Алгебрын илэрхийллийг бүлэглэх, квадрат гурван гишүүнтийг бүлэглэх, турших аргуудаар үржигдэхүүн болгон задалж сурсан. Бид эдгээр аргуудаа ашиглан рационал тоон илтгэгчтэй алгебрын илэрхийллийг үржигдэхүүн болгон задлах болно. Жишээ: $2x\sqrt{y}-4x+5\sqrt{y}-10$ илэрхийллийг үржигдэхүүн болгон задалъя.

Энэ илэрхийллийн бүх гишүүдэд агуулагдсан ерөнхий үржигдэхүүн байхгүй байна. Иймд илэрхийллийг үржигдэхүүн болгон задлахын тулд ерөнхий үржигдэхүүн гарч байхаар бүлэглэе.

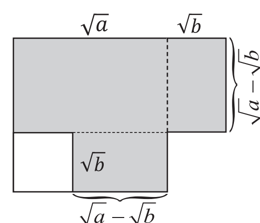
$$2x\sqrt{y}-4x+5\sqrt{y}-10=\left(2x\sqrt{y}-4x\right)+\left(5\sqrt{y}-10\right)=2x\left(\sqrt{y}-2\right)+5\left(\sqrt{y}-2\right)=$$

$=\left(\sqrt{y}-2\right)(2x+5)$ болно. Энэ илэрхийлэлд эхний хоёр нэмэгдэхүүн болон сүүлийн хоёр нэмэгдэхүүнийг авч бүлэглэхэд $\sqrt{y}-2$ гэсэн ерөнхий үржигдэхүүн гарч байна. Мөн өөрөөр бүлэглэж болно.Учир нь нэмэгдэхүүний байрыг солиход нийлбэр өөрчлөгдөхгүй. Тухайлбал:

$$2x\sqrt{y}-4x+5\sqrt{y}-10=\left(2x\sqrt{y}+5\sqrt{y}\right)-(4x+10)=\sqrt{y}(2x+5)-2(2x+5)$$
$$=(2x+5)\left(\sqrt{y}-2\right)$$

болох ба энд $2x+5$ гэсэн ерөнхий үржигдэхүүн гарч байна. Хоёр өөр аргаар бүлэглэж бодсон ч хариу ижил байна. Энэ нь алгебрын илэрхийллийг үржигдэхүүн болгон задлахад бүлэглэх гишүүдээ хэрхэн сонгохоос хамаарахгүй гэсэн үг.

Жишээ 6. $\sqrt{a}$ талтай квадратын нэг булангаас $\sqrt{b}$ талтай квадратыг огтолж авахад үлдэх дүрсийн талбайг ол.



Бодолт. $\sqrt{a}$ талтай квадратын талбай $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$, $\sqrt{b}$ талтай квадратын талбай $\left(\sqrt{b}\right)^2=b$ болох ба талбайн ялгаврын хэмжээгээр үлдэх дүрсийн талбай $\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2=a-b$ гэж тодорхойлогдоно. Мөн зурагт үзүүлснээр бидний олж буй дүрсийн талбай $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$ ба $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$ талтай тэгш өнцөгтийн талбайтай тэнцэж байна. Өөрөөр хэлбэл дүрсийн талбай болох $a-b$ илэрхийллийг үржигдэхүүн болгон задалж $a-b=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$ гэж бичиж болж байна. Рационал тоон илтгэгчтэй алгебрын илэрхийллийг үржигдэхүүн болгон задлахад энэ томьёо хэрэглэгддэг.

Жишээ 7. $a-4$ илэрхийллийг үржигдэхүүн болгон задал.

Бодолт. $a=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2$ чанар ашиглан квадратуудын ялгаврын томьёогоор задалбал
$a-4=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2-2^2=\left(a^{\frac{1}{2}}-2\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+2\right)$ болно.

Жишээ 8. $x+\sqrt{x}-6$ илэрхийллийг үржигдэхүүн болгон задал.
Бодолт. Илэрхийллийг бүлэглэх аргаар үржигдэхүүн болгон задалъя.
$\sqrt{x}$-ийг 2 илэрхийллийн ялгавар болгон $\sqrt{x}=3\sqrt{x}-2\sqrt{x}$ гэж бичиж болох ба дөрвөн нэмэгдэхүүн болгон бүлэглэж ерөнхий үржигдэхүүн хаалтын өмнө гаргавал
$x+\sqrt{x}-6=\left(\sqrt{x}\right)^2+3\sqrt{x}-2\sqrt{x}-6=\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)-2\left(\sqrt{x}+3\right)=\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)$
гэсэн хоёр илэрхийллийн үржвэр болж байна.

Жишээ 9. $x-2\sqrt{x}-8$ илэрхийллийг үржигдэхүүн болгон задал.
Бодолт. Энэ жишээг бүлэглэх аргаар үржигдэхүүн болгон задалж болох боловч өөр аргаар буюу гүйцэд квадрат ялгах аргаар үржигдэхүүн болгон задалж үзье. Өөрөөр хэлбэл $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ болон $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ томьёог ашиглан үржигдэхүүн болгон задалъя.

$x-2\sqrt{x}-8=\left(\sqrt{x}\right)^2-2\cdot\sqrt{x}\cdot1+1^2-1^2-8=\left(\sqrt{x}-1\right)^2-9=\left(\sqrt{x}-1\right)^2-3^2=$
$=\left(\sqrt{x}-1-3\right)\left(\sqrt{x}-1+3\right)=\left(\sqrt{x}-4\right)\left(\sqrt{x}+2\right).$

Жишээ 10. x^3+3x^2+3x+1 илэрхийллийг үржигдэхүүн болгон задал.

Бодолт. Энэ илэрхийллийн бүх гишүүдэд ерөнхий үржигдэхүүн байхгүй байна. Иймд хоёр хоёроор нь авч $(x^3+3x^2)+(3x+1)=(x^3+1)+(3x^2+3x)$ гэх мэт бүлэглэхэд мөн ерөнхий үржигдэхүүн гарахгүй байна. Тэгвэл $3x^2+3x=x^2+2x^2+2x+x$ гэж задлан 6 нэмэгдэхүүн болгон хоёр хоёроор нь бүлэглэвэл $(x+1)$ ерөнхий үржигдэхүүн гарах ба
$x^3+3x^2+3x+1=x^3+x^2+2x^2+2x+x+1=x^2(x+1)+2x(x+1)+x+1=$
$=(x+1)(x^2+2x+1)=(x+1)(x+1)^2=(x+1)^3$ болно.

5. Ерөнхий үржигдэхүүн хаалтаас гарга.

а. $30n^2-35n$ б. $12y^{\frac{1}{2}}-6y$
в. $28\sqrt{x}y-18\sqrt{x}y^2$ г. $7m^3n-28mn^3$

6. Ерөнхий үржигдэхүүн хаалтаас гаргаж үржигдэхүүн болгон задал.

а. $y(\sqrt{y}+5)-3(\sqrt{y}+5)$ б. $\sqrt{p}(p-2q)-\sqrt{q}(p-2q)$
в. $x\left(3x^{\frac{1}{2}}-4y^{\frac{1}{2}}\right)-y\left(3x^{\frac{1}{2}}-4y^{\frac{1}{2}}\right)$ г. $2\sqrt[3]{a}(c-d)-b(c-d)$

7. Ерөнхий үржигдэхүүн хаалтаас гаргаж үржигдэхүүн болгон задал.

а. $5a^3-10a^2+5a$ б. $x^3y+6x^2y^2+9xy^3$
в. $2\sqrt{a^3b}-8\sqrt{ab^3}$ г. $a^2b-2a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}}+ab^2$

8. Илэрхийллийг гүйцэд квадрат ялгах аргаар үржигдэхүүн болгон задал.

а. $x^2+7x+12$ б. $2x^2+3x+1$ в. $x-3\sqrt{x}-4$
г. x^2-6x+8 д. x^2-x-12 е. $x-4\sqrt{x}-5$
ё. $x+2\sqrt{x}-15$ ж. $x-11x^{\frac{1}{2}}+10$

9. Үржигдэхүүн болгон задал.

а. $3-x^2$ б. $64x-4y^2$ в. $16s-121t$
г. $y^{\frac{2}{9}}-9$ д. $8x-25y$ е. $a^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{16}$
ё. $b-1$ ж. $z^{0.8}-b^8$ з. $c^{\frac{4}{5}}-2$

10. Илэрхийллийг бүлэглэх аргаар үржигдэхүүн болгон задал.

а. $2x^2-5x-3$ б. $x-9\sqrt{x}-10$
в. $x-11\sqrt{x}+10$ г. $\sqrt{a}b^2-2b^2+3\sqrt{a}-6$
д. $x^2+3x-4x\sqrt{y}-12\sqrt{y}$ е. $-12\sqrt{b}+3a\sqrt{b}-4a+a^2$

11. Тэнцэтгэл үнэн эсэхийг шалга.

а. $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$ б. $x^2+x-12=(x+6)(x-2)$
в. $x^2+2x-8=(x+8)(x-1)$ г. $2x-5\sqrt{x}-3=(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)$
д. $x-x^{\frac{1}{2}}-12=\left(x^{\frac{1}{2}}-4\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+3\right)$ е. $6x-13\sqrt{x}+6=(3\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}-3)$

12. $\frac{y^2-y+c}{y+1}=y-2$ тэнцэтгэлийг үнэн байлгах c -ийн утгыг ол.

13. $\dfrac{x^3+x^2+x+c}{x^2+1}=x+1$ тэнцэтгэлийг үнэн байлгах c -ийн утгыг ол.

3.3. АЛГЕБРЫН БУТАРХАЙН ҮРЖҮҮЛЭХ, ХУВААХ ҮЙЛДЭЛ

Энэ сэдвийн хүрээнд бид алгебрын бутархайг хураах болон алгебрын бутархайн үржүүлэх, хуваах үйлдлийн тухай судлах болно.

Тодорхойлолт. Хэрэв $P, Q(Q\neq 0)$ нь алгебрын илэрхийлэл бол $\dfrac{P}{Q}$ хэлбэрийн илэрхийллийг алгебрын бутархай гэнэ.

Санамж Алгебрын бутархайн хуваарь нь ямагт тэгээс ялгаатай байна. Иймд цаашид алгебрын бутархайн хуваарь нь тэгээс ялгаатай байх илэрхийллийг авч үзэх болно.
Бид энгийн бутархайн үндсэн чанар, бутархайг хураах, бутархайн үйлдлийг өмнөх ангид судалсан.

1. $\dfrac{ac}{ab}=\dfrac{c}{b},\ (a\neq 0, b\neq 0)$

2. $\dfrac{c}{b}=\dfrac{ac}{ab},\ (a\neq 0, b\neq 0)$

3. $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd},(b\neq 0, d\neq 0)$

4. $\dfrac{a}{b}:\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c}=\dfrac{ad}{bc},(b\neq 0, c\neq 0)$

Жишээ 11. $x\neq\pm 2$ үед $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ бутархайг хураа.

Бодолт. Хүртвэр, хуваарьд байгаа илэрхийллийг үржигдэхүүн болгон задалж, хураана.

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\frac{x^2-x-2x+2}{(x-2)(x+2)}=\frac{x(x-1)-2(x-1)}{(x-2)(x+2)}=\frac{(x-1)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\frac{x-1}{x+2}$$

Жишээ 12. $\dfrac{x^2-4x+4}{\sqrt{x}-3}\cdot\dfrac{x-9}{x+2}$ үйлдлийг гүйцэтгэ.

Бодолт. $x=\left(\sqrt{x}\right)^2$ тодорхойлолт ашиглан $x-9=\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)$ гэж үржигдэхүүн болгон задална. Иймд

$$\frac{x^2-4x+4}{\sqrt{x}-3}\cdot\frac{x-9}{x+2}=\frac{(x-2)^{\cancel{2}}}{\cancel{\sqrt{x}-3}}\cdot\frac{\cancel{\left(\sqrt{x}-3\right)}\left(\sqrt{x}+3\right)}{\cancel{x-2}}=(x-2)\left(\sqrt{x}+3\right)=x\sqrt{x}+3x-2\sqrt{x}-6$$

болно.

Жишээ 13. $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4x+4}:\dfrac{2x+4}{(x-2)^2}$ үйлдлийг гүйцэтгэ.

Бодолт. Бутархайг хуваахдаа 4 дүгээр чанар хэрэглэн үйлдлийг гүйцэтгэвэл

$$\frac{x^2+4x+4}{x^2-4x+4}:\frac{2x+4}{(x-2)^2}=\frac{x^2+4x+4}{x^2-4x+4}\cdot\frac{(x-2)^2}{2x+4}=\frac{(x+2)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-2)^2}}\cdot\frac{\cancel{(x-2)^2}}{2\cancel{(x+2)}}=\frac{x+2}{2}$$ болно.

14. Үйлдлийг гүйцэтгэ.

а. $\frac{8b^{\frac{1}{2}}}{9}\cdot\frac{3}{b^{\frac{1}{3}}}$ б. $\frac{16}{z^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{z^{\frac{1}{4}}}{8}$ в. $\frac{5p^{\frac{1}{2}}q^4}{12pq^3}\cdot\frac{6p^{\frac{1}{2}}}{20q^2}$

г. $x(x+5)^2\cdot\frac{2}{x^2-25}$ д. $(y^2-4)\cdot\frac{y}{y+2}$ е. $\frac{3\sqrt{z}+12}{8z^3}\cdot\frac{16z^3}{9\sqrt{z}+36}$

ё. $\frac{3x-15}{4x^2-2x}\cdot\frac{10x-20x^2}{5-x}$ ж. $\frac{y^2-1}{6y+6}\cdot\frac{\sqrt{y}-\sqrt{5}}{y-5}$ з. $\frac{3-2x}{x+3}\cdot\frac{x^2+5x+6}{9-4x^2}$

15. Үйлдлийг гүйцэтгэ.

а. $\frac{8a^4b^3}{3c}:\frac{a^7b^2}{9c}$ б. $\frac{18a^2b^2}{5cd}:\frac{6ab^2}{5c^2d^2}$ в. $-\frac{25x^2y^2}{24a^2}:\left(-\frac{25x^5y^4}{3a^2b^2}\right)$

г. $\frac{6x^2y^2}{(x-2)}:\frac{3xy^2}{(x-2)^2}$ д. $\frac{(r+3)^2}{4r^3}:\frac{r+3}{r}$ е. $\frac{t^2+5t}{t+1}:(t+5)$

ё. $\frac{6p+7}{p+2}:(36p^2-49)$ ж. $\frac{a}{a-\sqrt{10}}:\frac{a^3}{a^2-10}$ з. $\frac{b-6\sqrt{b}+9}{16}:\frac{b-9}{4}$

16. Үйлдлийг гүйцэтгэ.

а. $\frac{2}{25x}\cdot\frac{5\sqrt{x}}{12}:\frac{2}{15\sqrt{x}}$ б. $\frac{4y^{\frac{3}{2}}}{7}:\frac{y^2}{14}\cdot\frac{3}{y^{\frac{1}{2}}}$

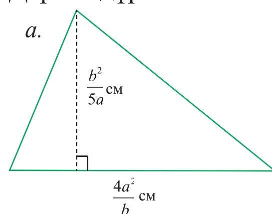
в. $\frac{x^2-4y^2}{x+2y}:(x+2y)\cdot\frac{2y}{x-2y}$ г. $\frac{x^2-6x+9}{x^2-4}:\frac{x^2-9}{x+2}\cdot(x-2)$

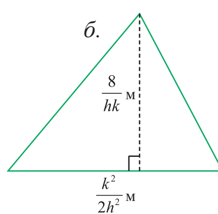
17. Бутархайг хялбарчил. а. $\frac{2x^3+12x^2+16x}{6x+24}$ б. $\frac{2\sqrt{x}+6}{x-\sqrt{x}-12}$

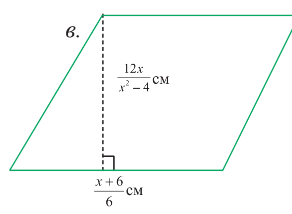
18. Өгсөн талуудтай тэгш өнцөгтийн талбайг ол.

а. $\frac{6x-x^2}{2x+4}, \frac{x^2-4}{36-x^2}$ б. $\frac{a^2-1}{ab+b}, \frac{b^2}{3-3a}$

19. Дараах дүрсийн талбайг ол.







3.4. АЛГЕБРЫН БУТАРХАЙН НЭМЭХ, ХАСАХ ҮЙЛДЭЛ

Бид өмнөх ангиудад ижил хуваарьтай алгебрын бутархайн нэмэх, хасах үйлдлийг судалсан. Ижил хуваарьтай алгебрын бутархайг нэмэхдээ (хасахдаа) бутархайн хуваарийг хэвээр үлдээж, хүртвэрүүдийг нь нэмнэ (хасна).

Жишээлбэл: а. $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{5}-\frac{\sqrt{x}}{5}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}-\sqrt{x}}{5}=\frac{-\sqrt{y}}{5}$

б. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3}+\frac{3}{\sqrt{a}+3}=\frac{\sqrt{a}+3}{\sqrt{a}+3}=1$

Хуваарь нь ижил биш бутархайнуудыг нэмэхдээ (хасахдаа) бутархайнуудыг ерөнхий хуваарьтай болгож, ижил хуваарьтай бутархайн нэмэх, хасах дүрмээр гүйцэтгэнэ.

Жишээ 14. Үйлдлийг гүйцэтгэ. а. $\frac{5}{12x}+\frac{7}{18y}$ б. $\frac{3}{5a^2b}-\frac{1}{10ab^2}$

Бодолт. Энэ бутархайнуудыг ижил хуваарьтай болгохын тулд ерөнхий хуваарийг олох хэрэгтэй. Иймд

а. $\frac{5}{12x}+\frac{7}{18y}=\frac{5}{12x}\cdot\frac{3y}{3y}+\frac{7}{18y}\cdot\frac{2x}{2x}=\frac{15y}{36xy}+\frac{14x}{36xy}=\frac{15y+14x}{36xy}$

б. $\frac{3}{5a^2b}-\frac{1}{10ab^2}=\frac{3}{5a^2b}\cdot\frac{2b}{2b}-\frac{1}{10ab^2}\cdot\frac{a}{a}=\frac{6b}{10a^2b^2}-\frac{a}{10a^2b^2}=\frac{6b-a}{10a^2b^2}$

Жишээ 15. а. $\frac{x^2}{x-y}+\frac{y^2}{y-x}$ б. $\frac{1}{x-y}-\frac{x}{xy-y^2}$

в. $\frac{x}{y-x}+\frac{y^2-3xy}{y^2-x^2}$ г. $\frac{2}{2x-1}-\frac{2x+3}{6x^2-5x+1}$ үйлдлийг гүйцэтгэ.

Бодолт. а. $\frac{x^2}{x-y}+\frac{y^2}{y-x}$ бутархайн хуваарь нь $x-y$ ба $y-x$ тул ижил болгохын тулд $y-x$ илэрхийллийг (–1)-ээр үржүүлнэ. Тэгвэл $(y-x)\cdot(-1)=-y+x=x-y$ бутархайн хуваарь нь ижил болж үйлдлийг гүйцэтгэвэл

$$\frac{x^2}{x-y}+\frac{y^2}{y-x}=\frac{x^2}{x-y}+\frac{y^2}{y-x}\cdot\frac{-1}{-1}=\frac{x^2}{x-y}+\frac{-y^2}{x-y}=\frac{x^2-y^2}{x-y}=\frac{(x+y)(x-y)}{x-y}=x+y$$ болно.

б. $\frac{1}{x-y}-\frac{x}{xy-y^2}$ бутархайн хуваарийг үржигдэхүүн болгон задалж, ерөнхий хуваарийг олж хасвал

$$\frac{1}{x-y}-\frac{x}{xy-y^2}=\frac{1}{x-y}-\frac{x}{y(x-y)}=\frac{1}{x-y}\cdot\frac{y}{y}-\frac{x}{y(x-y)}=\frac{y-x}{y(x-y)}=\frac{-(x-y)}{y(x-y)}=-\frac{1}{y}$$

гэж гарна.

в. $\frac{x}{y-x}+\frac{y^2-3xy}{y^2-x^2}$ бутархайн хуваарийг үржигдэхүүн болгон задалж, ерөнхий хуваарийг нь олбол $(y-x)(y+x)$ байна.

$$\frac{x}{y-x}+\frac{y^2-3xy}{y^2-x^2}=\frac{x}{y-x}\cdot\frac{y+x}{y+x}+\frac{y^2-3xy}{(y-x)(y+x)}=\frac{xy+x^2+y^2-3xy}{(y-x)(y+x)}=\frac{x^2-2xy+y^2}{(y-x)(y+x)}=$$

$$= \frac{(y-x)^{\not 2}}{\cancel{(y-x)}(y+x)} = \frac{y-x}{y+x}$$

г. $\frac{2}{2x-1} - \frac{2x+3}{6x^2-5x+1}$ бутархайн ерөнхий хуваарийг олохын тулд $6x^2-5x+1$ квадрат гурван гишүүнтийг үржигдэхүүнд задалбал $6x^2-5x+1 = 6x^2-3x-2x+1$ $= 3x(2x-1)-(2x-1) = (2x-1)(3x-1)$ болох ба үйлдлийг гүйцэтгэвэл

$$\frac{2}{2x-1} - \frac{2x+3}{6x^2-5x+1} = \frac{2}{2x-1} - \frac{2x+3}{(2x-1)(3x-1)} = \frac{2}{(2x-1)} \cdot \frac{(3x-1)}{(3x-1)} - \frac{2x+3}{(2x-1)(3x-1)}$$

$$= \frac{6x-2-(2x+3)}{(2x-1)(3x-1)} = \frac{6x-2-2x-3}{(2x-1)(3x-1)} = \frac{4x-5}{(2x-1)(3x-1)}$$ болно.

Жишээ 16. $\left(x+\frac{9}{x-6}\right) : \frac{3x^2-18x+27}{x^2-36}$ илэрхийллийг хялбарчил.

Бодолт. Илэрхийллийг хялбарчлахдаа дараах зарчмыг баримтална.

1. Үйлдлийн дарааллыг тогтооно.
2. Үйлдлийн дарааллын дагуу бутархайнуудыг нэмэхдээ (хасахдаа) ерөнхий хуваарийг олж ижил хуваарьтай бутархайнуудад шилжүүлэн хүртвэрийг эмхэтгэнэ.
3. Гарсан бутархайг боломжтой бол хураана.
4. Үйлдлийн дарааллын дагуу үржүүлэх, хуваах үйлдлийг гүйцэтгэхдээ хүртвэр, хуваариудыг үржигдэхүүн болгон задалж, боломжтой бол хураана.

Иймд үйлдлийн дарааллын дагуу хаалтад байгаа бутархайнуудыг нэмэхэд

$$x+\frac{9}{x-6} = \frac{x}{1}\cdot\frac{(x-6)}{(x-6)} + \frac{9}{x-6} = \frac{x^2-6x+9}{x-6} = \frac{(x-3)^2}{x-6}$$ гарна.

Дараа нь хуваах үйлдлийг гүйцэтгэвэл

$$\frac{(x-3)^2}{x-6} : \frac{3x^2-18x+27}{x^2-36} = \frac{(x-3)^2}{x-6} : \frac{3(x^2-6x+9)}{(x-6)(x+6)} = \frac{\cancel{(x-3)^2}}{\cancel{x-6}} \cdot \frac{\cancel{(x-6)}(x+6)}{3\cancel{(x-3)^2}} = \frac{x+6}{3}$$ болно.

20. Үйлдлийг гүйцэтгэ.

а. $\frac{x}{x-y} : \frac{x^2}{y-x}$

б. $\frac{9b+9}{4b+8} \cdot \frac{2b+4}{3b-3}$

в. $\frac{(5-a)^2}{10a-2} \cdot \frac{25a^2-1}{a^2-10+25}$

г. $\frac{x^2-z^2}{14x^2z^4} : \frac{x^2+2xz+z^2}{3xz^3}$

21. Үйлдлийг гүйцэтгэ.

а. $\frac{3}{5x} + \frac{7}{5x}$

б. $\frac{1}{2x^2} - \frac{5}{2x^2}$

в. $\frac{x}{x^2-2x-3} - \frac{3}{x^2-2x-3}$

г. $\frac{x}{x^2+4x-12} + \frac{6}{x^2+4x-12}$

д. $\frac{5x-1}{(2x+9)(x-6)} - \frac{3x-6}{(2x+9)(x-6)}$

е. $\frac{4-x}{8x+1} - \frac{5x-6}{8x+1}$

22. Үйлдлийг гүйцэтгэ.

а. $\frac{6}{x-5}+\frac{3}{5-x}$ б. $\frac{8}{2-x}+\frac{7}{x-2}$

в. $\frac{x-2}{x-6}-\frac{x+2}{6-x}$ г. $\frac{x-10}{x-8}-\frac{x+10}{8-x}$

23. Дараах бутархайг ижил хуваарьтай болго.

а. $\frac{5}{8},\frac{3}{20x}$ б. $\frac{y}{15a},\frac{y^2}{35}$ в. $\frac{-7}{24x},\frac{5}{75x^2}$ г. $\frac{-5}{6m^4},\frac{1}{15mn^7}$

д. $\frac{6}{(x-4)(x+2)},\frac{-8}{(x-4)(x-6)}$ е. $\frac{x}{(2x-1)(x-7)},\frac{2}{(2x-1)(x+1)}$

ё. $\frac{5}{x-6},\frac{x-5}{x^2-8x+12}$ ж. $\frac{7a}{a+4},\frac{a+12}{a^2-16}$

24. Дараах бутархайг тэнцүү байлгах илэрхийллийг хоосон зайд нөхөн бич.

а. $\frac{5}{3x}=\frac{\square}{9x^2y}$ б. $\frac{-5}{xy}=\frac{\square}{4x^2y^3}$

в. $\frac{2x}{x-1}=\frac{\square}{x(x-1)(x+2)}$ г. $\frac{y}{y+6}=\frac{\square}{y^2+5y-6}$

25. Үйлдлийг гүйцэтгэ.

а. $\frac{4}{3p}-\frac{5}{2p^2}$ б. $\frac{6}{5a^2b}-\frac{1}{10ab}$ в. $\frac{s-1}{s}-\frac{t+1}{t}$

г. $\frac{x+2}{5x^2}+\frac{x+4}{15x}$ д. $\frac{4a-2}{3a+12}-\frac{a-2}{a+4}$ е. $\frac{10}{b(b+5)}+\frac{2}{b}$

26. Үйлдлийг гүйцэтгэ.

а. $b+2+\frac{1}{b-2}$ б. $h-3+\frac{1}{h+3}$ в. $\frac{6b}{b-4}-\frac{1}{b+1}$

г. $\frac{a}{a-3}-\frac{5}{a+6}$ д. $\frac{t+5}{t-5}-\frac{10t-5}{t^2-25}$ е. $\frac{s+8}{s-8}-\frac{16s+64}{s^2-64}$

27. Үйлдлийг гүйцэтгэ.

а. $\frac{2}{3x-15}+\frac{x}{25-x^2}$ б. $\frac{x+2}{x^2-36}-\frac{x}{x^2+9x+18}$

в. $\frac{5}{9-x^2}-\frac{4}{x^2+4x+3}$ г. $\frac{9}{x^2-2x+1}-\frac{x-3}{x^2-x}$

28. Илэрхийллийг хялбарчил.

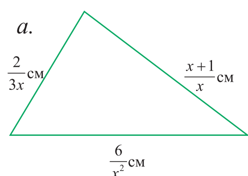
а. $\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\cdot\frac{ab}{a+b}$ б. $\frac{y-3}{y+3}\cdot\left(y+\frac{y^2}{3-y}\right)$

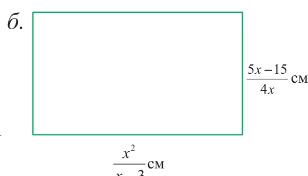
в. $\left(x-\frac{5x}{x+2}\right):\frac{x-3}{x+2}$ г. $\frac{a^2-x^2}{b^2-16}\cdot\frac{b+4}{a-x}+\frac{x}{4-b}$

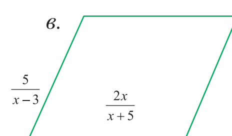
д. $\frac{x-y}{2x+y}+\frac{1}{x-y}\cdot\frac{x^2-y^2}{2x+y}$ е. $\left(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{x}\right):\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)$

ё. $\left(a+\frac{1}{a^2}\right):\left(\frac{a^2+1}{a^2}-\frac{1}{a}\right)$ ж. $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)\cdot\frac{1}{a-b}$

29. Дараах дүрсийн периметрийг ол.







БҮЛГИЙН НЭМЭЛТ ДААЛГАВАР

1. Бутархайг хураа.

а. $\frac{28a^3b^3}{14a^2b^3}$ б. $\frac{25x^2yz^3}{125xyz}$ в. $\frac{\sqrt[3]{4m^2n^2}}{\sqrt[3]{32n^5m^2}}$

г. $\frac{125\ \ q-2^{\frac{1}{3}}}{25\ \ q-2^{\frac{1}{4}}}$ д. $\frac{x^2-4x+3}{x-3}$ е. $\frac{a-4}{a^{\frac{1}{2}}-2}$

2. Хаалтыг задал.

а. $(\sqrt{11}-3)(\sqrt{11}+3)$ б. $\left(z^{\frac{1}{2}}-5\right)\left(5+z^{\frac{1}{2}}\right)$

в. $\left(\sqrt{7y}-3\sqrt{x}\right)^2$ г. $(3\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+2\sqrt{b})$

3. Үржигдэхүүн болгон задал.

а. $-8x^4y^2-12x^2y^4-16x^5y^2$ б. $10a^2+21x\sqrt{y}-14ax-15a\sqrt{y}$

в. $6a^{\frac{1}{3}}x-34bx-3a^{\frac{1}{3}}+17b$ г. $5\sqrt{a}x-6bx-5\sqrt{a}y+6by$

д. $x^3+x^2y-x^2z^{\frac{1}{2}}-xyz^{\frac{1}{2}}$ е. $ax^2-bx^2-b\sqrt{x}+a\sqrt{x}-a+b$

4. Илэрхийллийн утгыг ол.

а. Хэрэв $b=0.01, c=2$ бол $\frac{b^{\frac{2}{3}}\cdot\left(c^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{-2}{3}}}{b^{\frac{1}{6}}}$ б. Хэрэв $x=\sqrt{x}, y=36$ бол $\left(x^{12}\cdot y^{-3}\right)^{\frac{-1}{6}}$

5. Үйлдлийг гүйцэтгэ.

а. $\left(b^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{3}}\right)^{12}$ б. $\left(\frac{x^{-\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{3}}z^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}}\right)^{-12}$

в. $\frac{3a+9}{a^2}\cdot\frac{a^3}{6a+18}$ г. $\frac{4-\sqrt{y}}{5}:\frac{2\sqrt{y}-8}{15}$

д. $\left(x^2+5x-24\right)\left(\frac{x+8}{x-3}\right)$ е. $(9k-25)\left(\frac{3\sqrt{k}+5}{3\sqrt{k}-5}\right)$

ё. $\frac{7k+28}{2k+4}\cdot\frac{k^2-2k-8}{k^2+2k-8}$ ж. $\frac{5y^2-20}{y^3+2y^2+y+2}:\frac{10y}{y^3+y}$

6. Бутархайн хуваарийг язгуураас чөлөөл.

а. $\frac{7}{\sqrt{18}+3}$ б. $\frac{-1}{\sqrt{pz}+\sqrt{qz}}$ в. $\frac{12}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

г. $\frac{1}{3\sqrt{b}-2\sqrt{z}}$ д. $\frac{t-5}{\sqrt{t}+\sqrt{5}}$ е. $\frac{b-7}{\sqrt{b}-\sqrt{7}}$

7. Үйлдлийг гүйцэтгэ.

а. $\frac{a+2}{2a+6}-\frac{3}{a+3}$ б. $\frac{y}{2y-1}+\frac{3}{1-2y}$ в. $\frac{4}{\sqrt{q}-4}+\frac{\sqrt{q}}{4-\sqrt{q}}$

г. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$ д. $\frac{2}{3x-5}-8$ е. $\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}$

ё. $4x+3-\frac{2x+1}{x+4}$ ж. $\frac{5}{x-1}-\frac{3}{x+1}$ з. $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}$

и. $\frac{2}{a+3}+\frac{a+19}{a^2-2a-15}$ й. $\frac{4k}{k^2+2k+1}-\frac{3}{k+1}$ к. $\frac{5}{9-x^2}+\frac{4}{x^2+4x+3}$

8. Илэрхийллийг хялбарчил.

а. $\left(\frac{2}{b-a}-\frac{1}{b}\right)\cdot\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}-a\right)$ б. $\left(a+\frac{6-a^2}{1+a}\right):\frac{6+a}{a^2-1}$

в. $\left(a+\frac{2+a^2}{1-a}\right)\cdot\frac{1-2a+a^2}{a+2}$ г. $\frac{9a^2-4}{2a^2-5a+2}\cdot\frac{2-a}{3a+2}+\frac{a}{1-2a}$

д. $\left(\frac{b}{b-c}+\frac{bc}{c^2-b^2}\right)\cdot\frac{c^2-2bc+b^2}{b^2}$ е. $\frac{x^2}{x^2+2xy+y^2}:\left(\frac{x}{x+y}-\frac{xy}{y^2-x^2}\right)$

ё. $\left(\frac{b}{c-b}-\frac{bc}{c^2-b^2}\right):\frac{b^2}{c^2-2bc+b^2}$ ж. $\left(1-\frac{a\sqrt{a}+1}{a\left(\sqrt{a}+1\right)}\right)\cdot\frac{a}{\sqrt{a}-1}$

9. Тэнцэтгэл үнэн эсэхийг шалга.

а. $\left(x-\sqrt[3]{2}\right)\left(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4}\right)=x^3-2$

б. $\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right)=3$

в. $\left(\sqrt[3]{2x}-\sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{4x^2}+\sqrt[3]{2xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)=2x-y$

г. $\left((3a)^{\frac{1}{3}}+(2b)^{\frac{1}{3}}\right)\left(9a^{\frac{2}{3}}-6(ab)^{\frac{1}{3}}+4b^{\frac{2}{3}}\right)=3a-2b$

д. $\left(2a-\sqrt[3]{b}\right)\left(4a^2+2a\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}\right)=8a^3-b$

е. $\left(x+2\sqrt[3]{y}\right)\left(x^2-2x\sqrt[3]{y}+4\sqrt[3]{y^2}\right)=x^3-8y$

IV БҮЛЭГ. КООРДИНАТЫН АРГА

Энэ бүлгийг судалснаар дараах мэдлэг, чадварыг эзэмшинэ.

- *Хавтгайн тэгш өнцөгт координатын систем, цэгийн координатыг ойлгох, түүн дээр цэг тэмдэглэх, цэгийн координат олох*
- *Хавтгайн тэгш өнцөгт координатын системд хоёр цэгийн хоорондох зай, хэрчмийн дундаж цэгийн координатыг олох*
- *Координат нь өгсөн хоёр цэгийг дайрсан шулууны налалтыг олох*
- *Өгсөн нөхцөлийг ашиглан шулууны тэгшитгэл бичих*
- *Координатын эх дээр төвтэй, өгсөн радиустай тойргийн тэгшитгэл бичих*

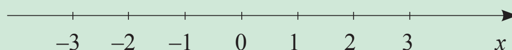
4.1 ТЭГШ ӨНЦӨГТ КООРДИНАТЫН СИСТЕМ, ЦЭГИЙН КООРДИНАТ

Тоон шулуун. Хавтгай дээр хэвтээ шулуун авъя. Уг шулуун дээр орших дурын цэг сонгон, O үсгээр тэмдэглээд, тооллын эх гэе. Шулуун дээр зүүнээс баруун тийш чиглэл тогтоож түүн дээр O цэгээс ялгаатай M цэг авч, OM хэрчмийн уртыг нэгж болгон сонгоё.

O M 1 x

Эерэг бодит x тоо бүрийг O цэгийн баруун талд тооллын эхээс x нэгж зайд орших цэгт, сөрөг бодит x тоо бүрийг O цэгийн зүүн талд тооллын эхээс $|x|$ зайд орших цэгт харгалзуулъя. Тооллын эхэд 0 харгалзана. Өөрөөр хэлбэл бодит тоо бүрд уг шулууны нэг цэгийг харгалзууллаа. Мөн энэ шулууны цэг бүрд нэг бодит тоо харгалзаж байна.

Тодорхойлолт. Тооллын эх, нэгж хэрчим, чиглэл сонгосон шулууныг **тоон шулуун** (координатын шулуун) гэнэ.



Тоон шулуун дээрх цэгийн координат.

Тоон шулуун дээрх дурын P цэгт харгалзах x бодит тоог түүний координат гээд $P(x)$ гэж тэмдэглэнэ. Тухайлбал: Тоон шулуун дээрх P цэгт 4 гэсэн бодит тоо харгалзаж байна. Иймд P цэгийн координат 4 бөгөөд $P(4)$ гэж бичнэ.

O P –3 –2 –1 0 1 2 3 4 x

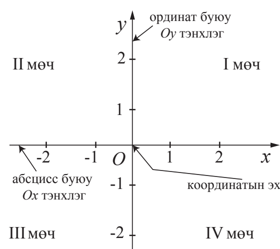
Чанар. а. Хэрэв тоон шулуун дээрх A, B хоёр цэгийн координат харгалзан x_1, x_2 бол тэдгээрийн хоорондох зай $|AB| = |x_2 - x_1|$ байна.
б. Хэрэв AB хэрчмийн дундаж M цэгийн координатыг x гэвэл $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ байна.

Хавтгайн тэгш өнцөгт координатын систем.

Францын философич, математикч Рене Декарт өрөөний таазанд сууж буй ялааны байрлалыг тодорхойлохыг оролдсоноор хавтгайн тэгш өнцөгт координатын системийг нээжээ. Тэрээр ялааны байрлалыг тодорхойлохдоо координатын систем анх ашигласан.

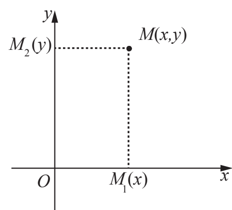
Рене Декарт (1596-1650)

Хавтгай дээр хэвтээ тоон шулуун авч, тооллын эхийг нь дайруулан түүнд перпендикуляр, ижил нэгжтэй тоон шулууныг эерэг чиглэл нь доороос дээшээ чиглэсэн тооллын эхүүд давхцаж байхаар огтлолцуулж авъя. Эдгээр тоон шулууны ерөнхий эхийг **координатын эх** гээд O-оор тэмдэглэе. Ингэж байгуулсан системийг хавтгайн **тэгш өнцөгт координатын систем** гэнэ. Тэгш өнцөгт координатын систем өгсөн хавтгайг **координатын хавтгай** гэнэ.



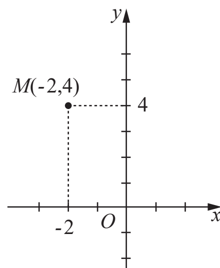
Хавтгайн координатын системд цэгийн координат олох.

Координатын хавтгай дээр орших дурын M цэгээс координатын тэнхлэг тус бүрд перпендикуляр шулуун татъя. Эдгээр шулуунууд нь абсцесс тэнхлэгийг M_1 цэгт, ординат тэнхлэгийг M_2 цэгт огтолно. Хэрэв харгалзах тоон шулууны M_1 цэгт харгалзах бодит тоо x, M_2 цэгт харгалзах бодит тоо y бол (x,y) эрэмбэлсэн хос тоог M цэгийн **координат** гэх ба $M(x,y)$ гэж тэмдэглэдэг.



Санамж Хоёр тоон шулуун дээрх цэгүүд нь мөн хоёр тооноос хамаарсан $(x, 0)$, $(0, y)$ гэсэн координаттай болно.

Жишээ 1. Өгсөн M цэгээс тэнхлэг тус бүрд перпендикуляр буулгахад абсцесс тэнхлэгийг $(-2,0)$ цэгээр, ординат тэнхлэгийг $(0,4)$ цэгээр огтолсон. –2-ыг M цэгийн абсцесс буюу x координат, 4-ийг ординат буюу y координат гэх ба $M(-2,4)$ гэж тэмдэглэдэг.



Координатаар цэг байгуулах.

Одоо $(1.5, -3)$ координаттай M цэг хэрхэн байгуулахыг авч үзье.
Эхлээд Ox тэнхлэг дээр $M_1(1.5,0)$ цэг тэмдэглэж, түүнийг дайрсан Oy тэнхлэгтэй параллел шулуун татъя. Дараа нь Oy тэнхлэг дээр $M_2(0,-3)$ цэг тэмдэглэж, түүнийг дайрсан Ox тэнхлэгтэй параллел шулуун татъя. Энэ хоёр шулууны огтлолцлын цэг нь бидний байгуулах $(1.5,-3)$ цэг болно.
Ийнхүү хавтгайд тэгш өнцөгт координатын систем тогтоосноор хавтгайн цэг бүрд (x,y) хос бодит тоо, ийм хос бодит тоо бүрд хавтгайн нэг цэгийг харгалзуулах боломжтой боллоо.

1. Дараах асуултын дагуу ярилц.
   а. Цэгийн координатыг хэрхэн тодорхойлдог вэ?
   б. Хэрэв цэг I (II, III, IV) мөчид орших бол уг цэгийн x,y координат ямар тэмдэгтэй байх вэ?
2. Хэрэв $A(x,y)$ цэг нь координатын хавтгайн нэгдүгээр мөчид байрлах бол дараах цэгүүд хэддүгээр мөчид оршихыг тодорхойл.
   $A_1(-y,y)$, $A_2(-x,x)$, $A_3(-y,-x)$, $A_4(-x,-y)$, $A_5(y,-x)$, $A_6(y,-y)$
3. Тэгш өнцөгт координатын системд $A(-2.5,3), B\left(0,-\frac{2}{3}\right), C(0,4), D\left(-\frac{1}{2},-5\right)$ цэг байгуулж, цэг бүртэй а. координатын эхийн хувьд тэгш хэмтэй
   б. абсцесс тэнхлэгийн хувьд тэгш хэмтэй

в. ординат тэнхлэгийн хувьд тэгш хэмтэй цэгийн координатыг ол.

4. Абсцесс тэнхлэгтэй параллел шулуун дээрх хоёр цэгийн нэгийнх нь ординат –3 бол нөгөө цэгийн ординат хэдтэй тэнцүү вэ?

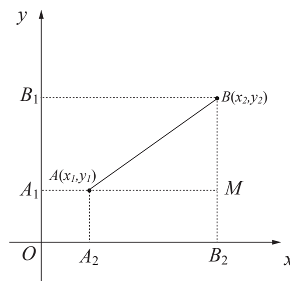
5. Өгсөн цэгүүдэд оройтой гурвалжны талбайг ол.

а. (–2,–2), (1,3), (6,–2) б. (–3,4), (1,4), (1,–5)

6. Дараах цэгүүд тэгш өнцөгтийн 3 орой бол дөрөв дэх оройн координатыг ол.

а. (–2,0), (–2,6), (3,0) б. (–4,–4), (5,–4), (5,–3)

Хоёр цэгийн хоорондох зай, хэрчмийн дундаж цэгийн координат олох

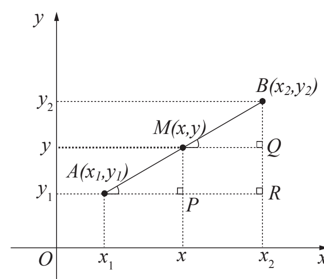


Хоёр цэгийн хоорондох зай. Координатын хавтгайд $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ цэг өгсөн байг. Тэгвэл *A,B* хоёр цэгийн хоорондох зайг олъё. *A,B* цэгүүдээс *Oy* ба *Ox* тэнхлэг тус бүрд перпендикуляр буулгаж, түүний суурийг харгалзан A_1, A_2, B_1, B_2 гэж тэмдэглэвэл координатууд нь харгалзан $A_1(0,y_1), A_2(x_1,0), B_1(0,y_2), B_2(x_2,0)$ байна.

BB_2, AA_1 хоёр шулууны огтлолцлын цэгийг *M* гэвэл координат нь (x_2,y_1) байна. *AMB* тэгш өнцөгт гурвалжны хувьд Пифагорын теорем бичвэл $AB^2 = MA^2 + BM^2$ болно.

Гэтэл $MA = B_2A_2, BM = B_1A_1$ тул $AB^2 = B_2A_2^2 + B_1A_1^2$ болох ба $B_2A_2 = |x_2 - x_1|$, $B_1A_1 = |y_2 - y_1|$ тул $AB^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$ ба $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ болно.

Хоёр цэгийн хоорондох зайг олох томьёо. Хавтгайд өгсөн $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ хоёр цэгийн хоорондох зайг $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ томьёогоор олно.

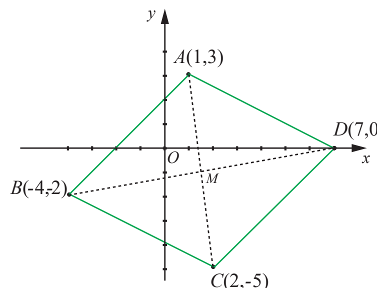


Хэрчмийн дундаж цэгийн координат. $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ цэгүүд өгсөн ба $M(x,y)$ нь *AB* хэрчмийн дундаж цэг байг. *MQ* ба *AR* нь *Ox* тэнхлэгтэй параллел, *MP* ба *BR* нь *Oy* тэнхлэгтэй параллел. Тэгвэл *Q, R, P* цэгийн координатууд харгалзан $(x_2,y),(x_2,y_1),(x,y_1)$ байна. $\angle MAP=\angle BMQ$, $\angle APM=\angle MQB=90°$, $AM=MB$ тул $\Delta MAP=\Delta BMQ$. Иймд $AP=MQ$, $MP=BQ$. Нөгөө талаас $AP = |x - x_1|, MQ = |x_2 - x|$ ба зургаас $x_1 < x < x_2$ тул $x - x_1 = x_2 - x$, $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ болно.

$MP = |y - y_1|, BQ = |y_2 - y|$ ба зургаас $y_1 < y < y_2$ тул $y - y_1 = y_2 - y$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ болно. Цэгүүдийн бусад байрлалд ижилхэн тооцоо хийж болно.

Хэрчмийн дундаж цэгийн координат олох томьёо. $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ бол *AB* хэрчмийн дундаж цэгийн координат $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ байна.

Жишээ 2. $A(1,3), B(-4,-2), C(2,-5)$ цэгт оройтой $ABCD$ параллелограммын D оройн координат болон BD диагоналийн уртыг ол.



Бодолт. Хэрэв AC-ийн дундаж цэгийг $M(x,y)$ гэвэл координат $x=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$, $y=\frac{3-5}{2}=\frac{-2}{2}=-1$ буюу $M\left(1\frac{1}{2},-1\right)$ байна. Хэрэв D оройн координатыг $(a,\ b)$ гэвэл $\frac{-4+a}{2}=1\frac{1}{2}$ буюу $a=7$ болно. Мөн $\frac{-2+b}{2}=-1$ буюу $b=0$ олно. Иймд $D(7,0)$ болох тул $|BD|=\sqrt{(-4-7)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{11^2+2^2}=\sqrt{121+4}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$.

7. Өгсөн хоёр цэгийн хоорондох зайг ол.

а. $(2,4), (-4,-4)$ б. $\left(-\frac{3}{2},1\right)$, $\left(\frac{5}{2},-2\right)$ в. $\left(-\frac{3}{4},-3\right)$, $(-0.75,-4)$

8. Өгсөн хоёр цэгт төгсгөлтэй хэрчмийн дундаж цэгийн координатыг ол.

а. $(-1,3)$, $(-8,5)$ б. $\left(\frac{2}{3},1\right)$, $\left(\frac{7}{3},-3\right)$ в. $\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{5}{2},1\right)$

9. $(-1,3)$, $(3,5)$ хоёр цэгт төгсгөлтэй хэрчмийн дундаж цэгээс $(4,6)$,$(-2,-10)$ цэгт төгсгөлтэй хэрчмийн дундаж цэг хүртэлх зайг ол.

10. $(1,7)$, $(2,2)$, $(-1,5)$ цэгт оройтой гурвалжныг тэгш өнцөгт гурвалжин болохыг харуул. (Пифагорын урвуу теорем ашигла.)

11. $(8,4)$, $(-2,-1)$, $(-3,2)$ цэгүүдэд оройтой гурвалжныг адил хажуут гэж батал.

12. $A(-1,1)$, $B(-6,0)$, $C(-9,-4)$, $D(-4,-3)$ цэгүүдэд оройтой дөрвөн өнцөгтийг параллелограмм гэж батал.

13. $M(6,4)$, $N(4,-2)$, $P(11,-1)$, $K(-1,3)$ байх $MNPK$ дөрвөн өнцөгт квадрат болохгүйг батал.

14. 5 радиустай тойргийн төв $(-3,-3)$ цэг дээр оршино. $(1,0)$ цэг тойрог дээр оршихыг батал.

15. $A(1,4)$, $B(3,-6)$, $C(2,-1)$ цэгүүдийн нэг нь нөгөө хоёрынхоо хооронд орших бол тэр цэгийг ол. Хариугаа хоёр цэгийн хоорондох зайн томьёогоор шалга.

16. Хоёр цэгийн хоорондох зайн томьёо ашиглан $(2,1)$, $(1,4)$, $(6,-11)$ цэгүүд нэг шулуун дээр оршихыг харуул.

17. Хэрэв $M(3,-5)$ нь $A(1,-8)$, $B(x,y)$ хоёр цэгийг холбосон хэрчмийн дундаж цэг бол x ба y-ийн утгыг ол.

18. Хэрэв P цэг нь AB хэрчмийн дундаж цэг бөгөөд координат нь $\left(-2,\frac{1}{2}\right)$. $A\left(3,\frac{5}{4}\right)$ бол B цэгийн координатыг ол.

19. $A(7,4)$, $B(2,-8)$, $C(10,7)$ цэгт оройтой гурвалжны периметр ба AD медианы уртыг ол.

20. $(2,-1)$ цэг хүртэлх зай нь $\sqrt{65}$ байх, x координат нь 6 байх бүх цэгийг ол.

21. Хэрэв $(-2,-1)$, $(2,6)$, $(8,2)$ цэгүүд нь параллелограммын гурван орой бол дөрөв дэх оройн координатыг ол.

22. $M(-2,-5)$, $N(-1,-8)$, $P(2,-9)$, $Q(4,-3)$ байх *MNPQ* дөрвөн өнцөгтийн *MQ*, *QP* талуудын дундаж цэгүүд харгалзан *R,S* бол *NSR* гурвалжин адил хажуут гэж батал.

23. $y=2x^2-3$ парабол нь $y-x+2=0$ шулуунтай *A* ба *B* цэгээр огтлолцоно. *AB* хэрчмийн урт болон дундаж цэгийн координатыг ол.

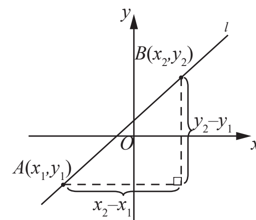
24. *ABC* гурвалжны *AB, BC, AC* талын дундаж цэгүүдийн координат харгалзан $(-3,0)$, $(2,-4)$, $(-5,10)$ бол гурвалжны гурван оройн координатыг ол.

25. $A(5,-2)$, $B(-3,1)$, $C(6,4)$ нь гурвалжны оройн цэгүүд байг. Хэрэв *AB* талын дундаж цэг *M*, *AC* талын дундаж цэг *N* бол *BC = 2MN* болохыг харуул.

26. $y=2x+1$, $2x-4y=-1$, $3x+y=20$ шулууны огтлолцолд үүссэн гурвалжны оройн координатуудыг ол.

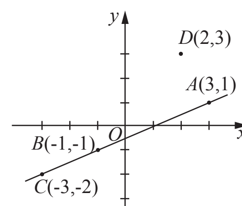
4.2. ШУЛУУНЫ НАЛАЛТ

Тодорхойлолт. Координатын хавтгайд *l* шулуун өгсөн байг. Хэрэв $A(x_1,y_1)$ ба $B(x_2,y_2),(x_1\neq x_2)$ цэг нь *l* шулуун дээр оршдог бол $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ тоог уг шулууны налалт гэнэ. Налалтыг ихэвчлэн *m* буюу *k* үсгээр тэмдэглэдэг.



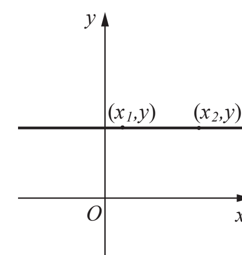
Шулууны налалт нь шулуун дээрх *A, B* цэгүүдийн эрэмбээс үл хамаарна. Тухайлбал: $A(-2,1)$ ба $B(3,4)$ цэгийн хувьд налалтыг $m=\dfrac{1-4}{-2-3}=\dfrac{-3}{-5}=\dfrac{3}{5}$ гэж олох $m=\dfrac{4-1}{3-(-2)}=\dfrac{3}{3+2}=\dfrac{3}{5}$ гэж олохтой ижил байна.

Жишээ 1. Нэг шулуун дээр орших $A(3,1),B(-1,-1),C(-3,-2)$ цэг ба уг шулуун дээр үл орших $D(2,3)$ цэгийн хувьд *AB*, *AC*, *AD* шулууны налалтыг ол.



Бодолт. *AB* шулууны налалт $\dfrac{-1-1}{-1-3}=\dfrac{1}{2}$, *AC* шулууны налалт $\dfrac{-2-1}{-3-3}=\dfrac{1}{2}$, *AD* шулууны налалт $\dfrac{3-1}{2-3}=-2$ байна. Эндээс *A,B,C* цэгүүд нэг шулуун дээр орших тул *AB* ба *AC* шулууны налалт тэнцүү, харин *A,B,D* цэгүүд нэг шулуун дээр үл орших тул *AB* ба *AD* шулууны налалтууд тэнцүү биш байна.

а. Хэрэв шулуун Ox тэнхлэгтэй параллел бол налалт нь ямар байх вэ?

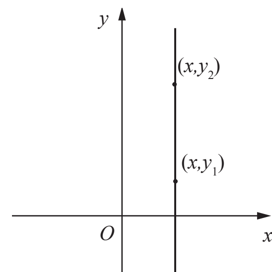


Шулуун дээр орших дурын хоёр цэгийн координатаар налалтыг тооцоолъё. Эдгээр цэг нь *Ox* тэнхлэгтэй параллел шулуун дээр орших тул хоёр цэгийн ординат тэнцүү. Тэгвэл хоёр цэгийн координатыг $(x_1,y),(x_2y)$

гээд налалтыг тооцоолбол $m=\dfrac{y-y}{x_2-x_1}=\dfrac{0}{x_2-x_1}=0$ болох ба абсцесс тэнхлэгтэй параллел шулууны налалт 0-тэй тэнцүү байна.

б. Хэрэв шулуун Оу тэнхлэгтэй параллел бол налалт нь ямар байх вэ?

Оу тэнхлэгтэй параллел шулуун дээр орших хоёр цэгийн абсциссууд тэнцүү. Тэгвэл хоёр цэгийн координатыг $(x,y_1),(x,y_2)$ гээд налалтыг тооцоолбол $m=\dfrac{y_2-y_1}{x-x}=\dfrac{y_2-y_1}{0}$ болно. Тоог 0-д хувааж болохгүй тул ординат тэнхлэгтэй параллел шулуунд налалт тодорхойлогдохгүй.



27. Өгсөн цэгүүдийг дайрах шулууны налалтыг ол.

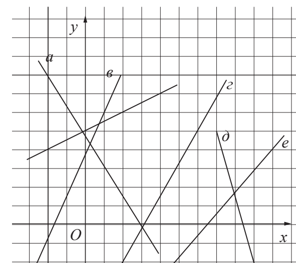
а. (2,–4) ба (–7,5) б. $\left(3,\dfrac{4}{5}\right)$ ба $\left(-\dfrac{3}{5},0\right)$ в. $(0,-1)$ ба $\left(-\dfrac{1}{2},5\right)$

г. $(-1,-2)$ ба $\left(\dfrac{8}{13},-2\right)$ д. $(-3,\sqrt{2})$ ба $(-5,\sqrt{2})$ е. $(2a,-a)$ ба $(-3a,4a)$

28. Зурагт үзүүлсэн шулуунуудын налалтыг ол.

29. Өгсөн цэгүүд нэг шулуун дээр орших эсэхийг тодорхойл.

а. $(0,1),(5,-2),\left(\dfrac{5}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$ б. $(3,-2),(0,-3),\left(\dfrac{9}{2},-6\right)$



30. а. Хэрэв $-\dfrac{1}{4}$ налалттай шулуун дээр орших цэгүүдийн координат $(-3t,7),(-5t,9)$ бол *t*-ийн утгыг ол.

б. Хэрэв $-\dfrac{1}{3}$ налалттай шулуун дээр орших цэгүүдийн координат $(-2,k-1),(k-1,k)$ бол *k*-ийн утгыг ол.

31. а. $y-x=0, y-2x=0, y-3x=0$ тэгшитгэл бүхий гурван шулууныг нэг координатын системд байгуулж, тус бүрийн налалтыг ол.

б. $y+x=0, y+2x=0, y+3x=0$ тэгшитгэл бүхий гурван шулууныг нэг координатын системд байгуулж, тус бүрийн налалтыг ол.

в. Налалт өсөхөд (буурахад) шулууны байрлал хэрхэн өөрчлөгдөх вэ? Дүгнэлт гаргаарай.

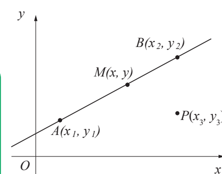
4.3. ШУЛУУНЫ ТЭГШИТГЭЛ

Тодорхойлолт. Хавтгай дээр өгсөн муруйн аливаа цэгийн координатууд хангадаг, харин уг муруй дээр оршихгүй цэгийн координатууд хангадаггүй тэгшитгэлийг **муруйн** тэгшитгэл гэнэ.

Өгсөн нөхцөлөөр шулууны тэгшитгэл бичих.

- $A(x_1,y_1)$ ба $B(x_2,y_2)$ хоёр цэгийг дайрсан шулууны тэгшитгэлийг бичье. Уг шулуун дээр $M(x,y)$ цэг тэмдэглэе. *AM* шулуун болон *AB* (эсвэл *MB*) шулууны налалтууд тэнцүү байна. Өөрөөр хэлбэл *AM* шулууны налалт $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}$ ба *AB* шулууны налалт

$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ болно. Эдгээр цэг нэг шулуун дээр орших тул $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ байна. Эндээс $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ болно.

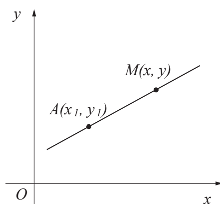


> $A(x_1,y_1)$ ба $B(x_2,y_2)$ хоёр цэгийг дайрсан шулууны тэгшитгэл
> $$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \text{ байна.}$$

Харин уг шулуун дээр үл орших аливаа $P(x_3,y_3)$ цэгийн хувьд *AM, AP* шулууны налалтууд тэнцүү биш. Өөрөөр хэлбэл $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}\neq\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$ тул *P* цэгийн координат уг шулууны тэгшитгэлийг хангахгүй.

Жишээ 1. *A*(–3,4) ба *B*(7,–6) хоёр цэгийг дайрсан шулууны тэгшитгэлийг бич.
Бодолт. Уг шулуун дээр орших $M(x,y)$ цэг авъя. *AM* шулуун болон *AB* (эсвэл *MB*) шулууны налалтууд тэнцүү гэдгээс *AM* шулууны налалт $\dfrac{y-4}{x-(-3)}$ ба *AB* шулууны налалт $\dfrac{-6-4}{7-(-3)}$ болно. Эдгээрийг тэнцүүлбэл $\dfrac{y-4}{x-(-3)}=\dfrac{-6-4}{7-(-3)}$ буюу $\dfrac{y-4}{x+3}=-1$ болно. Эндээс *AB* шулууны тэгшитгэл $y=-x+1$ болно.

- Хэрэв шулуун дээр орших нэг цэг болон уг шулууны налалт мэдэгдэж байвал шулууны тэгшитгэлийг бичиж болно.

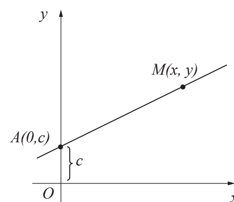


Өгсөн $A(x_1,y_1)$ цэгийг дайрах, m налалттай шулууны тэгшитгэлийг бичье. Уг шулуун дээр орших *A*-аас ялгаатай $M(x,y)$ цэг авъя. Тэгвэл *AM* шулууны налалт нь мөн *m* тул $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=m$ ба эндээс $y-y_1=m(x-x_1)$ болно.

> $A(x_1,y_1)$ цэгийг дайрсан *m* налалттай шулууны тэгшитгэл $y-y_1=m(x-x_1)$ байна.

Жишээ 2. (5,–2) цэгийг дайрсан, –3 налалттай шулууны тэгшитгэлийг бич.
Бодолт. $y-y_1=m(x-x_1)$ тэгшитгэлийг ашиглавал шулуун нь $y-(-2)=-3(x-5)$, $y=-3x+13$ тэгшитгэлтэй болно. Дээрх жишээнд шулууны тэгшитгэл нь $y=mx+c$, (m,c- дурын тоо) хэлбэртэй гарсан байна.

$y-y_1=m(x-x_1)$ тэгшитгэлээс *y*-ийг олбол $y=y_1+m(x-x_1)$, $y=y_1+mx-mx_1$, $y=mx+(y_1-mx_1)$ болно. Хэрэв $y_1-mx_1=c$ гэж тэмдэглэвэл $y=mx+c$ болно. Хэрэв $x=0$ бол $y=m\cdot 0+c=c$ болно. Өөрөөр хэлбэл *Oy* тэнхлэгийг (0,*c*) цэгээр огтолно. Иймд $y=mx+c$ шулууны хувьд *c* нь уг шулуун *Oy* тэнхлэгийг огтлох цэгийн ординат байна.



Жишээ 3. *Oy* тэнхлэгийг (0,7) цэгээр огтлох, $-\dfrac{1}{3}$ налалттай шулууны тэгшитгэлийг бич.

Бодолт. Өгсөн нөхцөлийн дагуу $m=-\dfrac{1}{3}$, $c=7$ байна. Энэ утгыг $y=mx+c$ тэгшитгэлд

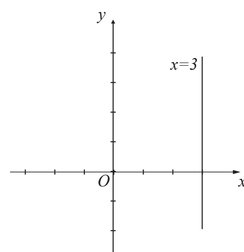
орлуулбал $y=-\frac{1}{3}x+7$ болно. Энэ тэгшитгэлийг $3y=-x+7$ буюу $3y+x-7=0$ гэж бичиж болно.

Тодорхойлолт. $ax+by+c=0$ хэлбэрийн тэгшитгэлийг хавтгайн шулууны **ерөнхий тэгшитгэл** гэнэ. Энд x,y нь хувьсагч, a,b,c- дурын бодит тоо

Жишээ 4. $5x+2y+8=0$ шулууны налалтыг ол.

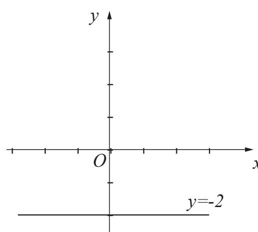
Бодолт. Шулууны тэгшитгэлийг $y=mx+c$ хэлбэрт шилжүүлбэл $5x+2y+8=0$, $2y=-5x-8$ ба $y=-\frac{5}{2}x-4$ болно. Иймд налалт нь $m=-\frac{5}{2}=-2\frac{1}{2}$ байна.

- Ординат тэнхлэгтэй параллел шулууны тэгшитгэл ямар байх вэ?



Тухайлбал, (3,5), (3,–2) хоёр цэгийг дайрсан шулууны тэгшитгэлийг бичье. Уг шулууны аливаа цэгийн абсцесс нь үргэлж 3 байх ба абсцесс нь 3 биш байх цэг уг шулуун дээр байхгүй тул шулууны тэгшитгэл $x=3$ болно.

- Абсцесс тэнхлэгтэй параллел шулууны тэгшитгэл ямар байх вэ?



Тухайлбал, (–1,–2), (4,–2) хоёр цэгийг дайрсан шулууны тэгшитгэлийг бичье. Хэрэв шулууны налалтыг тооцоолбол $m=\frac{-2-(-2)}{4-(-1)}=\frac{0}{5}=0$. Иймд шулуун абсцесс тэнхлэгтэй параллел байна. Эндээс $y+2=0\cdot(x+1)$ буюу тэгшитгэл нь $y=-2$ болно.

Ординат тэнхлэгтэй параллел шулууны тэгшитгэл нь $x=a$, абсцесс тэнхлэгтэй параллел шулууны тэгшитгэл нь $y=b$ байна. Энд a, b бодит тоо.

32. Дараах тэгшитгэл бүхий шулуун (муруй) дээр M цэг орших эсэхийг тодорхойл.

а. $2y-5x=7, M(-1,1)$ б. $y=\sqrt{2}x^2-x, M\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$

в. $y=\frac{x-5}{4x-3}, M(1,-4)$ г. $y=-\frac{3}{x}, M\left(5,-\frac{3}{5}\right)$

33. Хэрэв $(-2,a)$ цэг нь $3y-5x+8=0$ шулуун дээр орших бол a-ийн утгыг ол.

34. A цэгийг дайрах, өгсөн налалттай шулууны тэгшитгэл бич.

а. $A(-3,5)$, налалт 4 б. $A(4,-1)$, налалт –2 в. $A\left(\frac{1}{3},-4\right)$, налалт –2

г. $A\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$, налалт 1 д. $A\left(0,-\frac{3}{5}\right)$, налалт $\frac{1}{4}$ е. $A\left(2,-1\frac{1}{2}\right)$, налалт $-\frac{1}{2}$

35. Өгсөн хоёр цэгийг дайрах шулууны тэгшитгэлийг бич. Тэгшитгэлийг $ax+by+c=0$ хэлбэртэй бичээрэй.

а. (2,–3), (0,5) б. (–6,2), (4,–3) в. (–4,4), $\left(3,\frac{1}{2}\right)$

г. (0,0), (6,–5) д. (–4,–3), (5,7) е. ($2m$,–n),(–m, n)

36. Дараах шулууны налалт, Оy тэнхлэгтэй огтлолцох цэгийн координатыг ол.

а. $5x-2y+8=0$ б. $5x+2y=-3$ в. $-\frac{1}{5}x-3y=5$

г. $-3x+4y=0$ д. $-10x+4y=\frac{1}{3}$ е. $x+13y-7=0$

37. $4x-5y+20=0$ шулуун нь Ox тэнхлэгтэй A цэгээр, Oy тэнхлэгтэй B цэгээр огтлолцоно. OAB гурвалжны O оройгоос гарсан медианыг агуулсан шулууны тэгшитгэл бич.

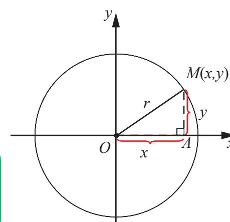
38. Хэрэв $3y+x=3$, $4y-3x=5$ хоёр шулууны огтлолцлын цэгийг дайрсан а. Ox тэнхлэгтэй параллел б. Оy тэнхлэгтэй параллел шулууны тэгшитгэлийг тус тус бич.

4.4. КООРДИНАТЫН ЭХ ДЭЭР ТӨВТЭЙ, *r* РАДИУСТАЙ ТОЙРГИЙН ТЭГШИТГЭЛ

Төв гэж нэрлэх өгсөн цэгээс ижил зайд орших хавтгайн бүх цэгийн олонлогийг тойрог гэж нэрлэдгийг бид мэднэ. Одоо тойргийн тэгшитгэл ямар байдгийг олъё.

r ($r > 0$) радиустай, $O(0, 0)$ цэгт төвтэй тойрог авч үзье.

Хэрэв бид тойрог дээр дурын $M(x,y)$ цэг тэмдэглэвэл $|OM|$ нь тойргийн радиустай тэнцүү. Өөрөөр хэлбэл $|OM| = r$ байна. M цэгээс координатын тэнхлэг тус бүрд перпендикуляр буулгавал $|MA| = y$, $|AO| = x$ байх MAO тэгш өнцөгт гурвалжин үүснэ. Энэ гурвалжны хувьд Пифагорын теорем бичвэл $|AO|^2+|MA|^2=|OM|^2$ байх ба $x^2+y^2=r^2$ болно.



> **Тойргийн тэгшитгэл.** Координатын эх $O(0,0)$ цэгт төвтэй, r радиустай тойргийн тэгшитгэл $x^2+y^2=r^2$ байна.

Тойрог дээр үл орших аливаа $P(x_1, y_1)$ цэг авбал $|OP|$ нь тойргийн радиустай тэнцэхгүй. Өөрөөр хэлбэл $|OP|\neq r$ тул P цэгийн координат нь $x^2+y^2=r^2$ тэгшитгэлийг хангахгүй.

Жишээ 1.

а. Координатын эх дээр төвтэй, $\sqrt{23}$ радиустай тойргийн тэгшитгэл бич.

б. $4x^2+4y^2=5$ тойргийн радиусыг ол.

Бодолт. а. Өгсөн нөхцөлөөр тойргийн төв (0,0) цэг дээр орших ба $r=\sqrt{23}$. Эдгээр утгыг $x^2+y^2=r^2$ тэгшитгэлдээ орлуулбал $x^2+y^2=\left(\sqrt{23}\right)^2$, $x^2+y^2=23$ болно.

б. Өгсөн тэгшитгэлийн тэнцүүгийн тэмдгийн хоёр талыг 4-д хуваавал $\frac{4x^2}{4}+\frac{4y^2}{4}=\frac{5}{4}$ буюу $x^2+y^2=\frac{5}{4}$ болно. Эндээс $r^2=\frac{5}{4}$ буюу $r=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ болно.

Жишээ 2.

$A\left(2\sqrt{2},-1\right), B\left(-2\sqrt{2},1\right)$ байх AB диаметртэй тойргийн тэгшитгэл бич.

Бодолт. Тойргийн төвийг $M(x,y)$ цэг гэвэл M нь AB диаметрийн дундаж дээр орших бөгөөд координатыг олбол $x=\dfrac{2\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{2}=\dfrac{0}{2}=0,\ y=\dfrac{-1+1}{2}=\dfrac{0}{2}=0$ буюу $M(0,0)$ болно. Тойргийн радиус диаметрийн хагастай тэнцүү тул тойргийн төвөөс A цэг, эсвэл B цэг хүртэлх зайтай тэнцүү байна. $r=\sqrt{\left(0+2\sqrt{2}\right)^2+\left(0-1\right)^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2+\left(-1\right)^2}=\sqrt{9}=3$

Эндээс тойргийн тэгшитгэл нь $x^2+y^2=3^2$ буюу $x^2+y^2=9$ болно.

39. Координатын эх дээр төвтэй, r радиустай тойргийн тэгшитгэл бич.

а. $r=4$ б. $r=\sqrt{3}$ в. $r=2\sqrt{3}$

г. $r=9$ д. $r=7$ е. $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

40. Төв нь координатын эх дээр орших, M цэгийг дайрсан тойргийн тэгшитгэл бич.

а. $M(-1,-5)$ б. $M(4,6)$ в. $M\left(\dfrac{1}{2},0\right)$

г. $M(-1,1)$ д. $M(-7,0)$ е. $M\left(0,\sqrt{13}\right)$

41. Дараах тэгшитгэлээс тойргийн радиус ба төвийг ол.

а. $x^2+y^2=16$ б. $x^2+y^2=25$ в. $x^2+y^2-4=0$

г. $9x^2+9y^2=25$ д. $x^2+y^2=10$ е. $10x^2+10y^2-5=0$

42. AB диаметртэй тойргийн тэгшитгэл бич.

а. $A(5,-4),B(-5,4)$ б. $A(8,1),B(-8,-1)$ в. $A(\sqrt{3},2),B(-\sqrt{3},-2)$

43. $y=2x-3$ шулуун $x^2+y^2=5$ тойрогтой A ба B цэгүүдээр огтлолцоно. AB-ийн дундаж цэг болон тойргийн төвийг дайрсан шулууны тэгшитгэл бич.

БҮЛГИЙН НЭМЭЛТ ДААЛГАВАР

1. Хэрэв (4,9) цэг нь $ax-2y=a+3$ шулуун дээр орших бол a-ийн утгыг ол.
2. $(0,0)$, $(11,2)$, $(8,6)$ цэгт оройтой гурвалжныг тэгш өнцөгт гурвалжин болохыг баталж, талбайг ол.
3. $(-6,6)$, $(0,-8)$, $(1,-4)$, $(05,-2)$ цэгт оройтой дөрвөн өнцөгтийг тэгш өнцөгт болохыг харуул.
4. $A(-2,1)$, $B(3,1)$, $C(-4,-2)$, $D(1,-2)$ байх $ABCD$ параллелограммын талбайг ол.
5. Хэрэв $A\left(3,\dfrac{3}{2}\right)$, $B\left(a,-\dfrac{1}{2}\right)$ хоёр цэгийг дайрсан шулууны налалт 4-тэй тэнцүү бол a-ийн утгыг ол.
6. Хэрэв ABC гурвалжны AB,BC,AC талуудыг агуулсан шулууны тэгшитгэл харгалзан $y+3=0,\ y+3x-13=0,\ 4y-7x+5=0$ бол $A,\ B,\ C$ оройн цэгийн координатыг ол. Хэрэв $ABCD$ параллелограмм бол D оройн координатыг ол.
7. $ABCD$ ромбын $B,\ D$ оройн координатууд харгалзан $(5,-1)$, $(0,4)$ байг. BD диагоналийг агуулсан шулууны тэгшитгэл бич. Хэрэв A оройн координат $(-2,-3)$ бол дөрөв дэх оройн координатыг ол.
8. $A(-3,4)$, $B(3,-4)$ байх AB диаметртэй тойргийн тэгшитгэл ол. $(-3,-4)$, $(3,4)$, $(0,-5)$ цэгүүд тойрог дээр орших эсэхийг тодорхойл.

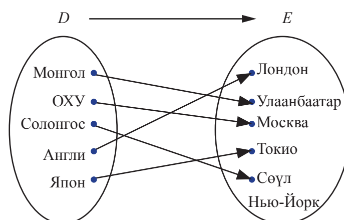
V БҮЛЭГ. ФУНКЦ БА ГРАФИК

Энэ бүлэг сэдвийг судалснаар дараах мэдлэг, чадварыг эзэмшинэ.

- *Функцийн тухай мэдэх, функцийн тодорхойлогдох муж ба утгын муж, дүрийг олох*
- $y = ax^2 + bx + c$ *квадрат функцийн графикийг байгуулах, түүний чанарыг мэдэх*
- $y = \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$ *хэлбэрийн функцийн график, түүний чанарыг мэдэх*
- *a нь рационал тоо ба* $n = -2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2, 3$ *үед* $y = ax^n$ *функцийн графикийг байгуулах, чанарыг мэдэх*
- $y = a^x$ *хэлбэрийн функцийн графикийг байгуулах, түүний чанарыг мэдэх*
- $y = ka^x$ *хэлбэрийн функцийн графикийг байгуулах, түүний чанарыг мэдэх*
- *Муруйн шүргэгчийг зурж, налалтыг ойролцоогоор тооцоолох*

5.1. ФУНКЦ, ФУНКЦИЙН ТОДОРХОЙЛОГДОХ МУЖ БА ДҮР

Зураг дээр таван улсыг тухайн улсын нийслэлтэй холбож харуулсан байна. Сумаар холбосны дагуу бид (Монгол, Улаанбаатар), (ОХУ, Москва), (Солонгос, Сөүл), (Англи, Лондон), (Япон, Токио) гэсэн эрэмбэлэгдсэн хосуудыг бичиж болно. Энэ нь тухайн улсыг нийслэлд нь харгалзуулсан **харгалзаа** юм.



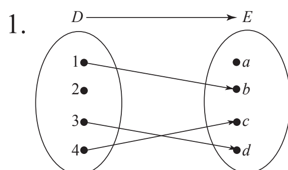
Улс ба нийслэлийн харгалзаа

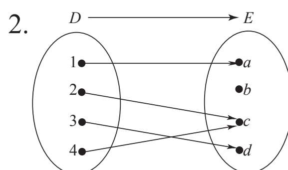
Тодорхойлолт. *D, E* гэсэн хоосон биш олонлог өгсөн байг. *D* олонлогийн *a* элемент ба *E* олонлогийн *b* элементээс тогтох (*a, b*) гэсэн аливаа эрэмбэлсэн хосын олонлогийг **харгалзаа** гэх ба $D \rightarrow E$ гэж тэмдэглэдэг.

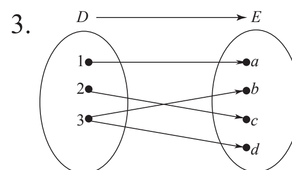
$D \rightarrow E$ харгалзааны элемент (*a, b*) хосыг *a* элементэд *b* элемент харгалзаж байна гэж уншдаг.

Тодорхойлолт. *D* ба *E* нь бодит тоон олонлогийн хоосон биш дэд олонлог байг. *D* олонлогийн элемент бүрд *E* олонлогийн цор ганц элементийг харгалзуулдаг *f* гэсэн харгалзааг *D* олонлог дээр тодорхойлогдсон *E* олонлогоос утгаа авдаг функц гээд $f : D \rightarrow E$, $D \xrightarrow{f} E$ гэх мэтээр тэмдэглэдэг.

Жишээ 1. *D* ба *E* нь бодит тоон олонлогийн дэд олонлог байг. Дараах $D \rightarrow E$ байх харгалзаануудаас аль нь функц болох вэ?

1.


2.


3.


Бодолт. 1 дэх харгалзааны хувьд D олонлогийн 1, 3, 4 гэсэн элементэд E олонлогийн нэг элемент харгалзаж байгаа боловч 2 гэсэн элементэд E олонлогийн ямар нэг элемент харгалзаагүй тул функц биш юм. Харин 2 дахь харгалзааны хувьд D олонлогийн элемент бүрд E олонлогийн цор ганц элемент харгалзаж байгаа тул функц болно. 3 дахь харгалзааны хувьд D олонлогийн 1, 2 гэсэн элементэд E олонлогийн нэг элемент харгалзаж байгаа боловч 3 гэсэн элементэд E олонлогийн хоёр элемент харгалзаж байгаа учраас функцийн тодорхойлолтыг хангахгүй.

Функцийн тодорхойлолт дээр үндэслэн дараах дүгнэлтийг хийж болно.

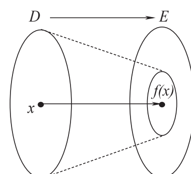
Дүгнэлт. D, E бодит тоон олонлогийн дэд олонлогийн хувьд $D \to E$ харгалзаа нь дараах 2 тохиолдолд функц болж чадахгүй. Үүнд:

- D олонлогийн ядаж нэг элементэд E олонлогийн элемент харгалзаагүй байх
- D олонлогийн нэг элементэд E олонлогийн нэгээс олон элемент харгалздаг байх.

Тодорхойлолт. $f: D \to E$ функц байг. D олонлогийн x элементэд харгалзах E олонлогийн элементийг f **функцийн** $\boldsymbol{x}$ **дээрх утга** гэх ба $f(x)$ гэж тэмдэглэнэ. Өөрөөр хэлбэл x элементэд $f(x)$ элемент харгалзана.

Жишээ 1-ийн хоёр дахь харгалзаа функц бөгөөд $1 \mapsto a, 2 \mapsto c, 3 \mapsto d, 4 \mapsto c$ байна. Үүнийг өөрөөр $f(1) = a,\ f(2) = c,\ f(3) = d,\ f(4) = c$ гэж бичдэг.

Тодорхойлолт. $f: D \to E$ функцийн хувьд D олонлогийг f функцийн **тодорхойлогдох муж**, E олонлогийг f функцийн **утгын муж** гэж нэрлэнэ.
$\{f(x) \mid x \in D\}$ олонлогийг f функцийн **дүр** гэнэ.



Жишээ 1 дэх функцийн хувьд тодорхойлогдох муж нь $D = \{1, 2, 3, 4\}$, утгын муж нь $E = \{a, b, c, d\}$, дүр нь $\{a, c, d\}$ байна.

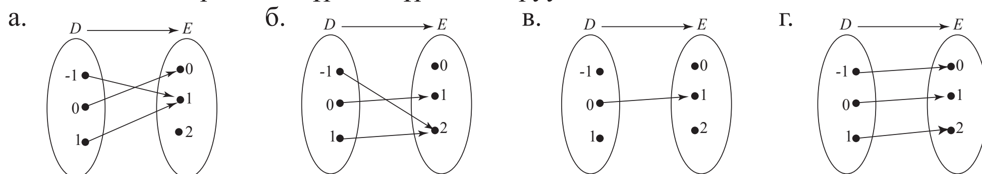
Санамж $y = f(x)$ гэж өгсөн тохиолдолд $f(x)$ нь **тодорхойлогдож байх** бүх бодит x тооны олонлогийг тодорхойлогдох муж гэнэ. Харин **бодит тоон олонлогийг** утгын муж гэж үзнэ.

Жишээлбэл: хэрэв функц $y = x^2 + 1$ гэж өгсөн бол тодорхойлогдох муж ба утгын муж нь $]-\infty, \infty[$, дүр нь $[1, \infty[$ байна. Харин $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $y = x^2$ функцийн хувьд тодорхойлогдох муж нь бодит тооны олонлог, утгын муж нь сөрөг биш бодит тооны олонлог гэдгийг зааж өгсөн байна. Энэ тохиолдолд дүр нь $\mathbb{R}^+$ буюу утгын мужтайгаа давхацна. Энд $\mathbb{R}^+$ нь сөрөг биш бодит тоон олонлог.

Жишээ 2. Хэрэв $D = \{-1, 0, 1\}$ ба $E = \{0, 1, 2\}$ олонлог өгсөн бол $D \to E$ гэсэн дараах харгалзаануудаас аль нь функц болох вэ? Хэрэв функц болдог бол уг функцийн дүрийг ол.

а. $(x, |x|)$ б. $(x, x^2 + 1)$ в. $(x, 2x + 1)$ г. $(x, x^3 + 1)$

Бодолт. Өгсөн харгалзаа бүрийг дүрсэлж харуулъя.



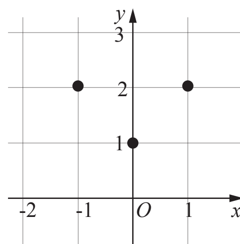
Эндээс харвал а, б, г дэх харгалзаа нь функц болно. Учир нь D олонлогийн элемент бүрд E олонлогийн цор ганц элемент харгалзаж байна. Харин в дэх харгалзаа нь функц болохгүй.

а дахь функцийн дүр нь $\{0,1\}$, б дэх функцийн дүр нь $\{1,2\}$, г дэх функцийн дүр нь $\{0,1,2\}$ гэсэн олонлог байна.

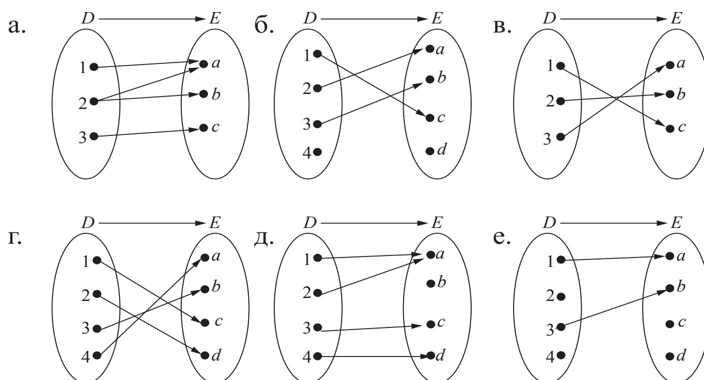
Тодорхойлолт. $f: D \to E, y = f(x)$ функц байг. Координатын хавтгай дээрх $\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$ гэсэн цэгийн олонлогийг f функцийн график гэнэ.

Жишээ 3. Хэрэв $D = \{-1, 0, 1\}$ ба $E = \{0, 1, 2, 3\}$ олонлог өгсөн бол $f: D \to E,\ f(x) = x^2 + 1$ функцийн графикийг байгуул.

Бодолт. $f(-1) = 2, f(0) = 1, f(1) = 2$ тул өгсөн функцийн график нь $(-1, 2), (0, 1), (1, 2)$ гэсэн цэгүүдээс бүрдэнэ. Эдгээр цэгийг координатын хавтгайд дүрсэлж харууллаа. Энэ функцийн дүр нь $\{1,2\}$ гэсэн олонлог байна.



1. D ба E нь бодит тоон олонлогийн дэд олонлог байг. Дараах $f: D \to E$ харгалзаануудаас аль нь функц болох вэ?



2. Хэрэв $D = \{-1, 1, 2\}$ ба $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ олонлог өгсөн бол дараах $D \to E$ харгалзаануудаас аль нь функц болох вэ? Хэрэв функц болдог бол уг функцийн дүрийг ол.

   а. $(x, x^2 - x)$ б. $(x, x + 1)$ в. $(x, 2|x|)$ г. $(x, x^3 + 1)$

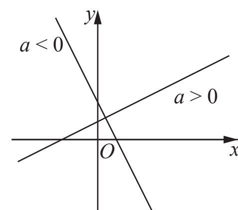
3. Хэрэв $D = \{1, 2, 3\}$ ба $E = \{a, b, c, d\}$ бодит тооны дэд олонлог өгсөн бол D дээр тодорхойлогдсон E-ээс утгаа авдаг функц нийт хэд байх вэ?

4. Хэрэв $D = \{-1, 0, 1\}$ ба $E = \{1, 2, 3\}$ бол $D \to E$ байх $(x, ax^2 + (a+1)x + 2)$ харгалзаа нь функц болдог бүх бодит a тоог ол.

5.2. КВАДРАТ ФУНКЦ

Тодорхойлолт. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b$ (a, b бодит тоо) хэлбэрийн функцийг x хувьсагчийн хувьд **шугаман функц** гэдэг.

Жишээлбэл: $f(x)=-4x-1, f(x)=-1, y=\frac{1}{3}x$ нь шугаман функц юм. Шугаман функцийн график нь шулуун байдаг ба энэ тухай бид өмнөх ангиудад судалсан тул энд шууд тоймлон бичье.



Санамж *$f(x)=ax+b$ функцийн графикийн чанар*

- (0, b) цэгээр Oy тэнхлэгийг, $a\neq 0$ үед $\left(-\frac{b}{a},0\right)$ цэгээр Ox тэнхлэгийг огтолно.
- Шулууны налалт нь a ба дараах чанартай байна.
  $a>0$ үед x-ийн утга өсөж байхад y-ийн утга өснө.
  $a<0$ үед x-ийн утга өсөж байхад y-ийн утга буурна.
  $a=0$ үед x-ийн утга өсөж байхад y -ийн утга тогтмол байна. Өөрөөр хэлбэл Ox тэнхлэгтэй параллел шулуун байна.

Жишээ 1. $\{x\mid -2\le x\le 2\}$ олонлог дээр тодорхойлогдсон $f(x)=ax+b$ функцийн дүр нь $\{y\mid -3\le x\le 5\}$ байх $a,b\,(a>0)$ бодит тоог ол.

Бодолт. $a>0$ үед x-ийн утга өсөж байхад y-ийн утга өсөх тул $f(-2)=-3$ ба $f(2)=5$ байна. Иймд $\begin{cases}-2a+b=-3\\ 2a+b=5\end{cases}$ системийг бодвол $a=2,\ b=1$ гэж гарна.

Тодорхойлолт. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c бодит тоо ба $a\neq 0$) хэлбэрийн функцийг x хувьсагчийн хувьд **квадрат функц** гэдэг.

Жишээлбэл: $f(x)=x^2-2x+1,\ f(x)=3x^2-1,\ y=-2x^2-3x$ нь квадрат функц юм.

Тайлбар Хэрэв $y=f(x)$ квадрат функц бол $f(x)$ нь x хувьсагчаас хамаарсан квадрат гурван гишүүнт байхыг анхаарна уу.

Жишээ 2. $f(x)=-x^2+2x+5$ квадрат функц өгөв. $f(2)+f(-2)$ утгыг ол.

Бодолт. $f(2)=-4+4+5=5$ ба $f(-2)=-4-4+5=-3$ тул $f(2)+f(-2)=2$ гарна.

Өмнөх ангиудад бид утгын хүснэгт зохиох замаар квадрат функцийн графикийг байгуулж сурсан. Одоо квадрат функцийн график нь ямар чанартай байдгийг судалъя.

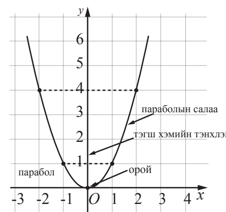
$y=x^2$ функцийн график

$y=x^2$ функцийн утгын хүснэгтийг зохиоё.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

$y=x^2$ функцийн график дээр орших (–3,9) ба (3,9), (–2,4) ба (2,4), (–1,1) ба (1,1) цэгүүд нь Oy тэнхлэгийн хувьд тэгш хэмтэй байна. Тодорхойлогдох мужийн аливаа x цэгийн хувьд $(-x)^2=x^2$ тул (x,x^2), $(-x,x^2)$ цэгүүд $y=x^2$ функцийн график дээр оршино. Иймд график нь Oy тэнхлэгийн хувьд тэгш хэмтэй.

Координатын эх $O(0,0)$ цэг нь $y=x^2$ функцийн график дээр оршиж байна. Утгын хүснэгтээс харвал $x<0$ үед x-ийн утга өсөж байхад y-ийн утга буурч, харин $x>0$ үед x-ийн утга өсөж байхад y-ийн утга өсөж байна. Энэ онцгой чанартай цэгийг параболын орой гэдэг. Эдгээр дээр тулгуурлан графикийг зурж харууллаа. График нь координатын хавтгайн 1 ба 2 дугаар мөчид оршино.



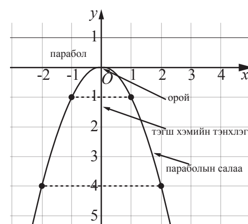
$y=-x^2$ функцийн график

Функцийн утгын хүснэгтийг зохиоё.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9

$y=-x^2$ функцийн график дээр орших (–3,–9) ба (3,–9),(–2,–4) ба (2,–4),(–1,–1) ба (1,–1) цэгүүд нь Oy тэнхлэгийн хувьд тэгш хэмтэй байна. Тодорхойлогдох мужийн аливаа x цэгийн хувьд $-(-x)^2=-x^2$ тул $(x,-x^2)$, $(-x,-x^2)$ цэгүүд $y=-x^2$ функцийн график дээр оршино. Иймд график нь Oy тэнхлэгийн хувьд тэгш хэмтэй.

Координатын эх $O(0,0)$ цэг нь уг функцийн график дээр оршино. $x<0$ үед x-ийн утга өсөж байхад y-ийн утга өсөж, харин $x>0$ үед x-ийн утга өсөж байхад y-ийн утга буурч байна. Иймд оройн цэг нь координатын эх болно. Эдгээр дээр тулгуурлан графикийг зурж харууллаа. График нь координатын хавтгайн 3 ба 4 дүгээр мөчид зурагдаж байна.

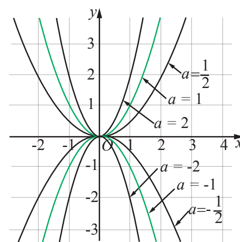


Тайлбар Аливаа бодит x-ийн хувьд $x^2\geq 0$ тул $y=x^2$ функцийн дүр нь $[0,\ \infty[$, харин $-x^2\leq 0$ тул $y=-x^2$ функцийн дүр нь $]-\infty,0]$ байна.

Тайлбар $y=x^2$ ба $y=-x^2$ функцийн графиктай ижил хэлбэрийн муруйг **парабол** гэдэг.

$y=ax^2$ квадрат функцийн график

$y=ax^2$ функцийн график нь a тооноос хамааран хэрхэн өөрчлөгдөхийг ажиглахын тулд a нь эерэг, сөрөг, модулиараа 1-ээс их, бага, 1-тэй нэгтэй тэнцүү байх тохиолдолд зурж харууллаа.



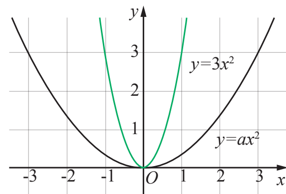
Дүгнэлт. $y=ax^2$ функцийн графикийн чанар

- Координатын эх нь параболын орой болно.
- Oy тэнхлэгийн хувьд тэгш хэмтэй.
- a эерэг бол параболын салаа дээшээ чиглэнэ (цаашид дээшээ харсан парабол гэнэ).
- a сөрөг бол параболын салаа доошоо чиглэнэ (цаашид доошоо харсан парабол гэнэ).
- $|a|$ -ийн утга ихсэх тусам параболын салаа нь хоорондоо ойртож, багасах тусам холдоно.
- $y=-ax^2$ функцийн графиктай Ox тэнхлэгийн хувьд тэгш хэмтэй.

Жишээ 3. $y=3x^2$ ба $y=ax^2$ функцийн графикийг зурагт өгөв. a бодит тооны хувьд аль нь үнэн бэ?

а. $a<-3$ б. $-3<a<0$ в. $a<0$

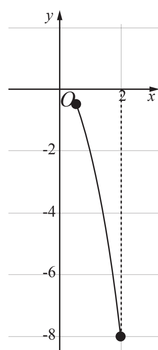
г. $0<a<3$ д. $a>3$



Бодолт. $y=ax^2$ парабол нь дээшээ харсан тул $a>0$ байна. $y=3x^2$ функцийн графиктай харьцуулахад $y=ax^2$ параболын салаа нь холдож байгаа тул $a<3$ байна. Иймд г хариулт нь үнэн.

Жишээ 4. $\left(2, \frac{1}{4}\right)$ ба $(4,b)$ цэгүүд $y=ax^2$ парабол дээр оршдог бол ab үржвэрийг ол.

Бодолт. $\left(2, \frac{1}{4}\right)$ ба $(4,b)$ цэгүүд $y=ax^2$ парабол дээр орших тул $\frac{1}{4}=4a$ ба $b=16a$ байна. Иймд $a=\frac{1}{16}$, $b=1$ гэж гарах ба $ab=\frac{1}{16}$ болно.



Жишээ 5. $\left\{x \mid \frac{1}{2} \le x \le 2\right\}$ олонлог дээр тодорхойлогдсон $f(x)=-2x^2$ функцийн дүрийг олж графикийг нь байгуул.

Бодолт. $a=-2<0$ тул $\frac{1}{2} \le x \le 2$ үед x-ийн утга өсөж байхад y-ийн утга буурна. Иймд $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$ ба $f(2)=-8$ байх тул дүр нь $\left\{y \mid -8 \le y \le -\frac{1}{2}\right\}$ байна. Графикийг нь байгуулж харууллаа.

5. Дараах функцүүдээс аль нь квадрат функц болох вэ?

а. $y=5x-1$ б. $y=-\frac{2}{5}x^2-1$ в. $y=-\frac{5}{x}+2x^2-1$

г. $y=-(x-1)^2+x^2$ д. $y=1+x^3$

6. Хэрэв $y=ax+2$ шугаман функц өгсөн бол дараах бодлогыг бод.

а. $-1 \le x < 1$ үед $y>0$ байх a тоог ол.

б. $-1 \le x < 1$ үед y нь эерэг ч, сөрөг ч утга авах a тоог ол.

7. Хэрэв $f(x)=ax+b$ шугаман функцийн тодорхойлогдох муж нь $D=\{x \mid 0 \le x \le 1\}$ ба дүр нь $E=\{y \mid 1 \le y \le 1\}$ бол a, b бодит тоог ол.

8. Доошоо харсан бөгөөд салаа нь хамгийн их тэлсэн параболыг ол. Хариултаа тайлбарла.

а. $y=-3x^2$ б. $y=5x^2$ в. $y=\frac{1}{2}x^2$ г. $y=-\frac{1}{2}x^2$ д. $y=-5x^2$

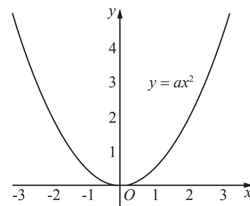
9. Аль параболын салаа нь Oy тэнхлэгт хамгийн ойрхон байх вэ? Тайлбарла.

а. $y=3x^2$ б. $y=-4x^2$ в. $y=\frac{1}{3}x^2$ г. $y=-\frac{5}{2}x^2$ д. $y=\frac{4}{3}x^2$

10. Хэрэв координатын эх оройн цэг нь болдог парабол дээр $(2,\,-6)$, $(k,\,-24)$ цэгүүд оршдог бол k бодит тоог ол.

11. Хэрэв тодорхойлогдох муж нь $\left\{x \mid -3 \le x \le -\frac{1}{3}\right\}$ гэж өгсөн бол $f(x)=x^2$ функцийн дүрийг олж графикийг нь байгуул.

12. Зурагт $y = ax^2$ квадрат функцийн графикийг харуулсан байна. Хэрэв энэ парабол дээр $(-2, 2), (3, b)$ цэгүүд оршдог бол $a + b$ нийлбэрийг ол.



$y = ax^2 + q$ квадрат функцийн график

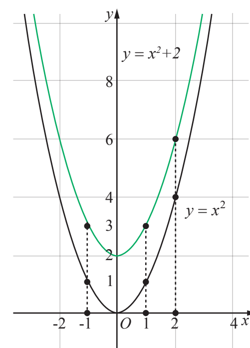
$y = ax^2 + q$ квадрат функцийн графикийн чанарыг мэдэхийн тулд дараах жишээг авч үзье.

Жишээ 6. а. $y = x^2 + 2$ б. $y = x^2 - 2$ функцийн графикийг утгын хүснэгт зохиох замаар тоймлон зур. Дүрийг ол. Оройн цэг, тэгш хэмийн тэнхлэгийг тодорхойл.

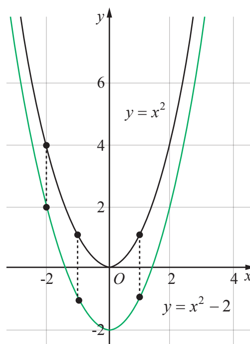
Бодолт. а. $y = x^2 + 2$ функцийн утгын хүснэгтийг дараах байдлаар зохиож ажиглалт хийе.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$x^2 + 2$	11	6	3	2	3	6	11

Утгын хүснэгтээс харахад x-ийн утга бүрд харгалзах $x^2 + 2$-ын утга нь x^2-ын утгаас 2-оор их тул $y = x^2 + 2$ функцийн график нь $y = x^2$ функцийн графикийг Oy тэнхлэгийн дагуу 2 нэгжээр дээш шилжүүлэхэд гарна. Иймд дүр нь $\{y \mid y \geq 2\}$ байна.
$x < 0$ үед x-ийн утга өсөж байхад y-ийн утга буурч, харин $x > 0$ үед x-ийн утга өсөж байхад y-ийн утга өсөж байна. Иймд оройн цэг нь (0,2), тэгш хэмийн тэнхлэг нь Oy тэнхлэг байна. Эдгээр дээр тулгуурлан графикийг зурж харууллаа.



б. $y = x^2 - 2$ функцийн утгын хүснэгтийг өөрсдөө зохиогоорой. x-ийн утга бүрд харгалзах $x^2 - 2$-ын утга нь x^2-ын утгаас 2-оор бага тул $y = x^2 - 2$ функцийн график нь $y = x^2$ функцийн графикийг Oy тэнхлэгийн дагуу 2 нэгжээр доош шилжүүлэхэд гарна. Иймд дүр нь $\{y \mid y \geq -2\}$ байна.
$x < 0$ үед x-ийн утга өсөж байхад y-ийн утга буурч, харин $x > 0$ үед x-ийн утга өсөж байхад y-ийн утга өснө. Иймд оройн цэг нь (0,–2), тэгш хэмийн тэнхлэг нь Oy тэнхлэг байна. Графикийг зурж харууллаа.

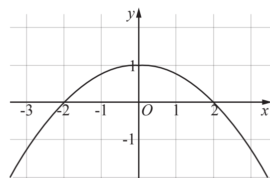


Дүгнэлт. $y = ax^2$ функцийн графикийг Oy тэнхлэгийн дагуу q хэмжээгээр зөөхөд $y = ax^2 + q$ функцийн график гарах тул дараах чанартай. Үүнд:

- $a > 0$ үед дээшээ харсан парабол, $a < 0$ үед доошоо харсан парабол байна.
- Оройн цэг нь $(0,q)$ координаттай байна.
- Тэгш хэмийн тэнхлэг нь Oy тэнхлэг буюу $x = 0$ шулуун байна.

Жишээ 7. $y = -\frac{1}{4}x^2$ функцийн графикийг Oy тэнхлэгийн дагуу q хэмжээгээр зөөхөд

гарах параболыг зурагт харуулсан ба уг парабол дээр (–4,–3) цэг оршдог бол уг параболын тэгшитгэлийг бич.



Бодолт. $y=-\frac{1}{4}x^2$ функцийн графикийг *Oy* тэнхлэгийн дагуу q хэмжээгээр зөөхөд гарах квадрат функц нь $y=-\frac{1}{4}x^2+q$ байх ба энэ функцийн график дээр (–4,–3) цэг орших тул $-3=-\frac{1}{4}\cdot 16+q$ байна. Иймд $q=1$ гарна. Эндээс параболын тэгшитгэл $y=-\frac{1}{4}x^2+1$ болно.

13. $y=-3x^2+6$ функцийн графикийн тухай дараах өгүүлбэр үнэн эсэхийг тогтоо.
   а. Координатын хавтгайн зөвхөн 3 ба 4 дүгээр мөчид оршино.
   б. Дүр нь $\{y\mid y\le 6\}$ олонлог байна.
   в. Оройн цэг нь (0,–6) координаттай.
   г. Тэгш хэмийн тэнхлэг нь $y=0$ шулуун байна.
   д. (–1,–3) цэг уг парабол дээр оршино.

14. Өгсөн квадрат функцийн графикийг *Oy* тэнхлэгийн дагуу q хэмжээгээр шилжүүлэхэд гарах функцийн томьёог олж, графикийг байгуул.
   а. $y=2x^2, q=-3$ б. $y=-\frac{1}{2}x^2, q=3$ в. $y=3x^2, q=1$

15. Өгсөн параболын оройн цэгийн координатыг олж, тэгш хэмийн тэнхлэгийн тэгшитгэлийг зохио. Функцийн дүрийг ол.
   а. $y=\frac{5}{2}x^2+3$ б. $y=-3x^2+1$ в. $y=\frac{1}{2}x^2-2$ г. $y=-2x^2-1$

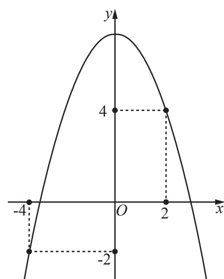
16. $y=-x^2+3$ функцийн графикийн хувьд дараах өгүүлбэр үнэн эсэхийг тогтоож, тайлбарла.
   а. *Oy* тэнхлэг нь тэгш хэмийн тэнхлэг болох ба дээшээ харсан парабол байна.
   б. Дүр нь $\{y\mid y\ge 3\}$ олонлог байна.
   в. Оройн цэг нь (0, 3) координаттай.
   г. $x>0$ үед x-ийн утга буурч байхад y-ийн утга буурна.
   д. Өгсөн функцийн график нь $y=-x^2$ функцийн графикийг *Ox* тэнхлэгийн дагуу 3 нэгжээр зүүн тийш зөөхөд гарна.

17. Хэрэв $y=4x^2-3$ функц өгсөн бол дараах бодлогыг бод.
   а. x-ийн утга буурч байхад y-ийн утга буурч байх x-ийг ол.
   б. x-ийн өсөж байхад y-ийн утга буурч байх x-ийг ол.

18. Хэрэв $f(x)=ax^2+q$ $(a<0)$ квадрат функцийн тодорхойлогдох муж нь $\{x\mid -4\le x\le 0\}$ ба дүр нь $\{y\mid -16\le y\le 0\}$ гэж өгсөн бол a, q тоог ол.

19. Хэрэв $y=ax^2$ функцийн графикийг *Oy* тэнхлэгийн дагуу –4 хэмжээгээр зөөхөд гарах парабол дээр (1, –2) цэг оршдог бол a тоог ол.

20. $y=ax^2+q$ квадрат функцийн графикийг зурагт харуулсан байна. aq үржвэрийг ол.



$y = a(x - p)^2$ квадрат функцийн график

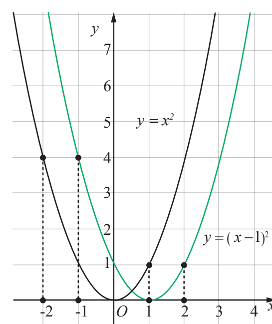
$y = a(x - p)^2$ квадрат функцийн графикийн чанарыг мэдэхийн тулд дараах жишээгээр эхэлье.

Жишээ 8. а. $y = (x-1)^2$ б. $y = (x+1)^2$ функцийн графикийг утгын хүснэгт зохиох замаар байгуул. Дүрийг ол. Оройн цэг, тэгш хэмийн тэнхлэгийг тодорхойл.

Бодолт. а. $y = (x-1)^2$ функцийн утгын хүснэгтийг дараах байдлаар зохиож ажиглалт хийе.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$(x-1)^2$	16	9	4	1	0	1	4

Утгын хүснэгтээс $x = -3$ дээрх x^2-ын утга нь $x = -2$ дээрх $(x-1)^2$-ын утгатай тэнцүү байгааг ажиглаж болно.

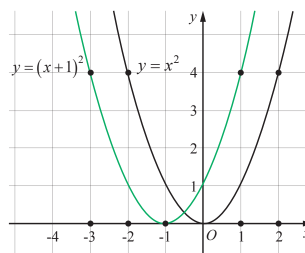


Мөн $x = -2, -1$ 0, 1, 2, дээрх x^2-ын утга нь харгалзан $x = -1, 0, 1, 2, 3$ дээрх $(x-1)^2$-ын утгатай тэнцүү байна. Иймд $y = (x-1)^2$ функцийн график нь $y = x^2$ функцийн графикийг Ox тэнхлэгийн дагуу 1 нэгжээр баруун тийш шилжүүлэхэд гарна.

Санамж Параллел зөөлтийн тухай эргэн санана уу.

$x < 1$үед x-ийн утга өсөж байхад y-ийн утга буурч, харин $x > 1$ үед x-ийн утга өсөж байхад y-ийн утга өсөж байна. Иймд оройн цэг нь (1,0), тэгш хэмийн тэнхлэг нь $x = 1$ шулуун байна. Эдгээр үр дүн дээр тулгуурлан графикийг зурж харуууллаа. Уг функцийн дүр нь $[0,\infty[$ байна.

б. $y = (x+1)^2$ функцийн утгын хүснэгтийг өөрсдөө зохио.



$x = -2$ дээрх x^2-ын утга нь $x = -3$ дээрх $(x+1)^2$-ын утгатай тэнцүү байгааг ажиглаж болно. Мөн $x = -1, 0, 1, 2, 3$ дээрх x^2-ын утга нь харгалзан $x = -2, -1, 0, 1, 2$ дээрх $(x+1)^2$-ын утгатай тэнцүү байна. Иймд $y = (x+1)^2$ функцийн график нь $y = x^2$ функцийн графикийг Ox тэнхлэгийн дагуу 1 нэгжээр зүүн тийш шилжүүлэхэд гарна.

$x < -1$ үед x-ийн утга өсөж байхад y-ийн утга буурч, харин $x > -1$ үед x-ийн утга өсөж байхад y-ийн утга өснө. Иймд оройн цэг нь (–1,0), тэгш хэмийн тэнхлэг нь $x = -1$ шулуун байна. Эдгээр үр дүн дээр тулгуурлан графикийг зурж харууллаа. Уг функцийн дүр нь $[0,\infty[$ олонлог байна.

Дүгнэлт. $y = ax^2$ функцийн графикийг Ox тэнхлэгийн дагуу p хэмжээгээр зөөхөд $y = a(x-p)^2$ функцийн график гарах тул дараах чанаруудтай. Үүнд:

- $a > 0$ үед дээшээ харсан, $a < 0$ үед доошоо харсан парабол байна.
- Оройн цэг нь $(p, 0)$ байна.
- Тэгш хэмийн тэнхлэг нь $x = p$ шулуун байна.

Жишээ 9. Хэрэв $y=-3x^2$ функцийн графикийг Ox тэнхлэгийн дагуу p хэмжээгээр зөөхөд гарах парабол дээр (4,–27) цэг оршдог бол уг параболын тэгшитгэлийг бич.

Бодолт. $y=-3x^2$ функцийн графикийг Ox тэнхлэгийн дагуу p хэмжээгээр зөөхөд гарах квадрат функц нь $y=-3(x-p)^2$ байх ба (4,–27) цэг график дээр нь орших тул $-27=-3(4-p)^2$ нөхцөл биелэх бөгөөд $(4-p)^2=9$ гэдгээс $4-p=\pm3$ гарна. Эндээс $p=1$ эсвэл $p=7$ гэж олдоно. Иймд $y=-3(x-1)^2$, $y=-3(x-7)^2$ гэсэн тэгшитгэл гарна.

21. $y=-2x^2$ функцийн графикийг ашиглан а. $y=-2(x-3)^2$ б. $y=-2(x+2)^2$ параболыг байгуулаад оройн цэгийг олж, тэгш хэмийн тэнхлэгийн тэгшитгэл зохио.

22. Өгсөн квадрат функцийн графикийг Ox тэнхлэгийн дагуу p хэмжээгээр шилжүүлэхэд гарах функцийн томьёог олж, графикийг байгуул.

а. $y=2x^2$, $p=-3$ б. $y=-\frac{1}{2}x^2$, $p=2$ в. $y=-3x^2$, $p=-1$

23. Параболын оройн цэгийн координат олж, тэгш хэмийн тэнхлэгийн тэгшитгэл зохио.

а. $y=-5(x-\frac{5}{2})^2$ б. $y=\frac{3}{2}(x+3)^2$ в. $y=3(x-10)^2$ г. $y=-\frac{1}{2}x^2$

24. $y=-2(x+2)^2$ функцийн графикийн хувьд дараах өгүүлбэрүүд үнэн эсэхийг тогтоож тайлбарла.

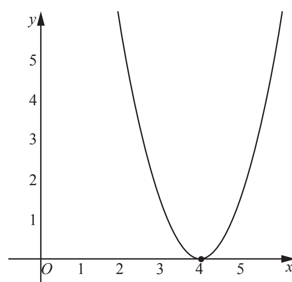
а. Тэгш хэмийн тэнхлэг нь $x=2$ тэгшитгэлтэй шулуун байна.

б. Дүр нь $\{y \mid y\ge 0\}$ олонлог байна.

в. $y=2(x+2)^2$ функцийн графиктай Ox тэнхлэгийн хувьд тэгш хэмтэй.

г. $x>-2$ үед x-ийн утга буурч байхад y-ийн утга буурна.

д. Өгсөн функцийн график нь $y=-2x^2$ функцийн графикийг Ox тэнхлэгийн дагуу 2 нэгжээр баруун тийш зөөхөд гарна.



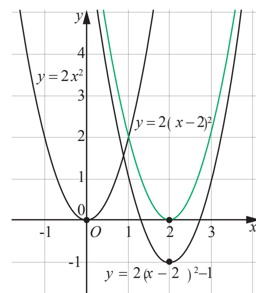
25. Хэрэв $f(x)=a(x-p)^2\ (a>0)$ квадрат функцийн тодорхойлогдох муж нь $\{x \mid 2\le x\le 8\}$, дүр нь $\{y \mid 16\le y\le 64\}$ ба $x>2$ үед x-ийн утга өсөхөд y-ийн утга өсдөг бол a, p тоог ол.

26. $y=\frac{3}{2}x^2$ параболыг Ox тэнхлэгийн дагуу p хэмжээгээр зөөхөд гарах параболыг зурагт харуулсан байна. Энэ квадрат функцийг $y=f(x)$ гэе. $f(2)-f(6)$ утгыг ол.

$y=a(x-p)^2+q$ квадрат функцийн график

$y=2x^2$ функцийн графикийг Ox тэнхлэгийн дагуу 2 нэгжээр баруун тийш зөөхөд $y=2(x-2)^2$ функцийн график гарах ба үүнийг Oy тэнхлэгийн дагуу 1 нэгжээр доош зөөхөд $y=2(x-2)^2-1$ функцийн график гарна.

Өөрөөр хэлбэл, $y=2(x-2)^2-1$ функцийн график нь $y=2x^2$ функцийн графикийг Ox тэнхлэгийн дагуу 2 нэгжээр баруун тийш, Oy тэнхлэгийн дагуу 1нэгжээр доош зөөхөд гарна.



Иймд уг функцийн график нь (2,–1) цэгт оройтой, тэгш хэмийн тэнхлэг нь $x = 2$ байх парабол байна.

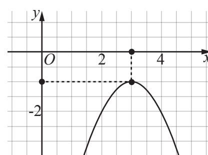
Дүгнэлт. $y = a(x-p)^2 + q$ квадрат функцийн график нь $y = ax^2$ функцийн графикийг Ox тэнхлэгийн дагуу p хэмжээгээр, Oy тэнхлэгийн дагуу q хэмжээгээр зөөхөд гарах тул дараах чанаруудтай.

- $a > 0$ үед дээшээ харсан, $a < 0$ үед доошоо харсан парабол байна.
- Оройн цэг нь $(p,\ q)$ координаттай байна.
- Тэгш хэмийн тэнхлэг нь $x = p$ шулуун байна.

Жишээ 10. $y = \frac{1}{3}x^2$ функцийн графикийг Ox тэнхлэгийн дагуу 2 нэгжээр зүүн тийш, Oy тэнхлэгийн дагуу 3 нэгжээр доош зөөхөд график нь гардаг квадрат функцийг ол. Дүр нь ямар олонлог байх вэ? Уг параболын оройн цэгийн координатыг олж тэгш хэмийн тэнхлэгийн тэгшитгэлийг зохио.

Бодолт. $y = a(x-p)^2 + q$ функцийн график нь өгсөн ёсоор $y = \frac{1}{3}x^2$ функцийн графикийг Ox тэнхлэгийн дагуу 2 нэгжээр зүүн, Oy тэнхлэгийн дагуу 3 нэгжээр доош зөөхөд гарах тул $a = \frac{1}{3}$, $p = -2$, $q = -3$ байна.
Иймд $y = \frac{1}{3}(x-(-2))^2 - 3$ буюу $y = \frac{1}{3}(x+2)^2 - 3$ болох тул оройн цэг нь (–2,–3) ба тэгш хэмийн тэнхлэг нь $x = -2$ шулуун байна. $\frac{1}{3}(x+2)^2 - 3$ илэрхийллийг хялбарчилбал $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$ гэж гарна.

Санамж Параболын тэгш хэмийн тэнхлэг нь оройн цэгийг дайрсан, Oy тэнхлэгтэй параллел шулуун байгааг ажиглана уу.



Жишээ 11. $y = a(x-p)^2 + q$ зурагт харуулсан байна.
Тэгвэл apq үржвэрийг ол.

Бодолт. Зургаас харахад $a = -1$, $p = 3$, $q = -1$ тул $apq = 3$ байна.

Жишээ 12. $f(x) = a(x+3)^2 + q\ (a < 0)$ квадрат функцийн тодорхойлогдох муж нь $\{x \mid -3 \le x \le 1\}$ ба дүр нь $\{y \mid -3 \le y \le 13\}$ гэж өгсөн бол a,q тоог ол.

Бодолт. $a < 0$ тул $x > -3$ үед x-ийн утга өсөж байхад y-ийн утга буурах тул $f(-3) = 13$ ба $f(1) = -3$ байна. Иймд $\begin{cases} 13 = q \\ -3 = 16a + q \end{cases}$ системийг бодвол $q = 13$, $a = -1$ гэж гарна.

27. $y = -2(x-1)^2 + 1$ функцийн графикийг байгуулж x-ийн утга өсөх үед y-ийн утга мөн өсөж байх x-ийн утгыг ол.

28. Дараах параболыг Oy тэнхлэгийн дагуу q хэмжээгээр, Ox тэнхлэгийн дагуу p хэмжээгээр зөөхөд гарах квадрат функцийн томьёог олж, графикийг байгуул.

а. $y = -3x^2$, $q = -1$, $p = -2$

б. $y = -\frac{1}{2}x^2$, $q = 1$, $p = -1$

в. $y = 3x^2$, $q = 1$, $p = 1$

г. $y = \frac{1}{2}x^2$, $q = -1$, $p = 1$

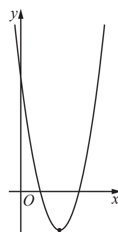
29. Параболын оройн цэгийн координатыг олж, тэгш хэмийн тэнхлэгийн тэгшитгэл зохио.

а. $y=-11(x+5)^2+15$ б. $y=7\left(x-\frac{8}{3}\right)^2+2$

в. $y=\frac{2}{5}(x+3)^2-5$ г. $y=-4(x-10)^2-7$

30. $y=2(x-5)^2+2$ функцийн графикийн хувьд дараах өгүүлбэр үнэн эсэхийг тогтоож, тайлбарла.

а. Тэгш хэмийн тэнхлэг нь $x=5$ тэгшитгэлтэй шулуун байна.
б. Оройн цэг нь $(-5,2)$ координаттай.
в. Дүр нь $\{y\mid y\geq 2\}$ олонлог байна.
г. $x>5$ үед x-ийн утга өсөж байхад y-ийн утга өснө.
д. $y=2x^2$ функцийн графикийг Oy тэнхлэгийн дагуу 2 нэгжээр дээш, Ox тэнхлэгийн дагуу 5 нэгжээр зүүн тийш зөөхөд өгсөн функцийн график гарна.
е. (4,4) цэг өгсөн парабол дээр оршино.



31. $y=a(x-p)^2+q$ параболыг зурагт харуулсан байна. Тэгвэл дараах тэнцэтгэл биш үнэн үү?

а. $a+p>0$ б. $pq<0$ в. $p-q<0$ г. $aq>0$

$y=ax^2+bx+c$ квадрат функцийн график

Квадрат функцийн графикийг тоймлон зурахын тулд парабол дээшээ эсвэл доошоо харахыг мэдэх, оройн цэгийн координатыг олох, тэгш хэмийн тэнхлэгийн тэгшитгэл зохиох, тэнхлэгүүдтэй огтлолцох цэгүүдийг олох нь чухал байдаг.

Тэнхлэгүүдтэй огтлолцох цэг

$y=ax^2+bx+c$ парабол координатын хоёр тэнхлэгтэй огтлолцох цэгийг олъё.

Оу тэнхлэгтэй огтлолцох цэг: Хэрэв $x=0$ бол $y=c$ болох тул Oy тэнхлэгтэй $(0, c)$ цэгээр огтлолцоно.

Ох тэнхлэгтэй огтлолцох цэг: Хэрэв $y=0$ бол $0=ax^2+bx+c$ тэгшитгэл гарна. Хэрэв энэ квадрат тэгшитгэл ялгаатай хоёр шийдтэй бол эдгээр нь уг параболын Ox тэнхлэгтэй огтлолцох цэгийн абсцесс болох тул $(x_1,0)(x_2,0)$ гэж гарна. Хэрэв $x_1=x_2$ гэсэн давхардсан хоёр шийдтэй бол Ox тэнхлэгийг $(x_1,0)$ цэгт шүргэнэ. Харин шийдгүй бол Ox тэнхлэгтэй огтлолцохгүй.

Оройн цэгийн координат, тэгш хэмийн тэнхлэг

$y=ax^2+bx+c$ параболын оройн цэгийн координат олж, тэгш хэмийн тэнхлэгийн тэгшитгэлийг зохиохын тулд ax^2+bx+c илэрхийллээс бүтэн квадрат ялгая.

$$ax^2+bx+c=(ax^2+bx)+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left[x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c=$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

гарна. Иймд дараах дүгнэлтийг хийж болно.

Дүгнэлт. $y = ax^2 + bx + c$ нь $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$ болох тул $y = ax^2$ функцийн графикийг Ox тэнхлэгийн дагуу $-\frac{b}{2a}$ хэмжээгээр, Oy тэнхлэгийн дагуу $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ хэмжээгээр зөөхөд $y = ax^2 + bx + c$ функцийн график нь гарна. Иймд $a > 0$ үед дээшээ харсан, $a < 0$ үед доошоо харсан парабол байна. Параболын оройн цэгийн координат нь $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$, тэгш хэмийн тэнхлэг нь $x = -\frac{b}{2a}$ шулуун байна.

Жишээ 13: $y = x^2 + 2x + 3$ параболын оройн цэгийн координат, координатын тэнхлэгүүдтэй огтлолцох цэгийг олж, тэгш хэмийн тэнхлэгийн тэгшитгэл зохио.

Бодолт. Тэгшитгэлийн баруун гар тал дахь $x^2 + 2x + 3$ илэрхийллийг $x^2 + 2x + 1 + 2 = (x^2 + 2x + 1) + 2 = (x+1)^2 + 2$ гэж бичиж болох тул $y = x^2 + 2x + 3$ нь $y = (x+1)^2 + 2$ хэлбэртэй болно. Иймд параболын оройн цэгийн координат (–1,2) болно. Тэгш хэмийн тэнхлэг нь оройн цэгийг дайрсан бөгөөд Oy тэнхлэгтэй параллел шулуун тул тэгшитгэл нь $x = -1$ байна.

Хэрэв $x = 0$ бол $y = 3$ болох тул Oy тэнхлэгтэй (0,3) цэгээр огтлолцоно. Хэрэв $y = 0$ бол $x^2 + 2x + 3 = 0$ тэгшитгэл гарна. Энэ тэгшитгэл шийдгүй тул Ox тэнхлэгтэй огтлолцохгүй.

Жишээ 14. $y = -3x^2 - 24x + 5$ параболын оройн цэгийн координат олж, тэгш хэмийн тэнхлэгийн тэгшитгэл зохио.

$-3x^2 - 24x + 5$ илэрхийллээс бүтэн квадрат ялгая.

$$\left(-3x^2 - 24x\right) + 5 = -3\left(x^2 + 8x\right) + 5 = -3\left(x^2 + 8x + 16 - 16\right) + 5 =$$

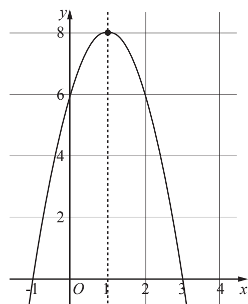
$= -3\left[(x+4)^2 - 16\right] + 15 = -3(x+4)^2 + 48 + 15 = 2(x+4)^2 + 63$ хэлбэрт шилжих тул параболын оройн цэг нь (–4,63) координаттай ба тэгш хэмийн тэнхлэг нь $x = -4$ шулуун байна.

Жишээ 15. $y = -2x^2 + 4x + 6$ параболыг тоймлон зур.

Бодолт. Графикийг тоймлон зурахын тулд парабол дээшээ харах эсэхийг тогтоож, тэнхлэгүүдийг огтлох цэг, оройн цэгийн координатыг олж, тэгш хэмийн тэнхлэгийн тэгшитгэл зохиоё.

$a = -2 < 0$ тул доошоо харсан парабол байна.

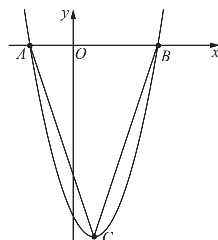
$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ томьёог ашиглан оройн цэгийн координатыг олбол (1,8) гарах тул тэгш хэмийн тэнхлэг нь $x = 1$ тэгшитгэлтэй.



Хэрэв $x = 0$ бол $y = 6$ гэж гарах тул Oy тэнхлэгтэй (0,6) цэгээр огтлолцоно. Хэрэв $y = 0$ бол $-2x^2 + 4x + 6 = 0$ тэгшитгэл гарна. Энэ тэгшитгэлийн шийд нь $x_1 = 3$, $x_1 = -1$ гэж гарах тул Ox тэнхлэгтэй (3,0) ба (–1,0) цэгээр огтлолцоно. Графикийг тоймлон зурлаа.

Жишээ 16. Хэрэв $y = x^2 + bx + c$ парабол дээр (–2,6) ба (1,–3) цэг оршдог бол b,c-г ол.

Бодолт. $y=x^2+bx+c$ парабол дээр (–2,6) ба (1,–3) цэг орших тул $6=4-2b+c$ ба $-3=1+b+c$ нөхцөл биелнэ. Иймд $\begin{cases}6=4-2b+c\\-3=1+b+c\end{cases}$ системийг бодвол $b=-2,\ c=-2$ гэж гарна.



Жишээ 17. $y=(x+2)(x-4)$ параболыг зурагт харуулсан байна. *Ox* тэнхлэгтэй огтлолцох цэгийг *A, B,* оройн цэгийг *C* гэе. Тэгвэл *ABC* гурвалжны талбайг ол.

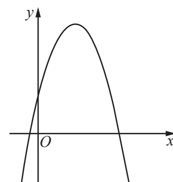
Бодолт. Гурвалжны талбайг олохын тулд *AB* тал болон *C* оройгоос буулгасан өндрийг олох хэрэгтэй. Хэрэв параболын оройн цэгийн координатыг олбол *ABC* гурвалжны *C* оройгоос буулгасан өндрийг олж болно. Хэрэв өгсөн параболын *Ox* тэнхлэгтэй огтлолцох цэгийг олбол *AB* талыг олж чадна. Иймд эхлээд оройн цэгийн координатыг олъё. $(x+2)(x-4)$ илэрхийллийг хялбарчилбал x^2-2x-8 болох тул $y=x^2-2x-8$ параболын оройн цэг нь (1,–9) гэж гарна. Иймд *ABC* гурвалжны *C* оройгоос буулгасан өндөр нь 9 нэгж байна. *Ox* тэнхлэгтэй огтлолцох цэгүүд нь $x=-2,\ x=4$ тул *AB* = 6 нэгж байна. Иймээс *ABC* гурвалжны талбай $S=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 9=27$ квадрат нэгж гэж гарна.

32. Бүтэн квадрат ялган дараах параболын оройн цэгийн координат олж, тэгш хэмийн тэнхлэгийн тэгшитгэл зохио.

а. $y=2x^2-4x+1$ б. $y=-3x^2-x+4$

в. $y=-\frac{1}{3}x^2+2x-5$ г. $y=4x^2+5x-2$

д. $y=3x^2-6x-2$ е. $y=-9x^2+12x+4$



33. $y=ax^2+bx+c$ квадрат функцийн графикийг зурагт харуулсан байна. Тэгвэл *a, b, c* болон *abc* нь эерэг сөрөг аль нь болохыг тодорхойл.

34. График нь (2,–3) цэг дээр оройтой, (1,–2) цэгийг дайрсан парабол байх квадрат функцийг ол.

35. Тэгш хэмийн тэнхлэг нь $x=1$ шулуун байдаг, (–1,5) ба (2,8) цэгүүдийг дайрсан параболын тэгшитгэлийг ол.

36. Хэрэв $y=a(x-1)^2+q$ $(a>0)$ квадрат функцийн тодорхойлогдох муж нь $\{x\,|\,1\le x\le 5\}$ ба дүр нь $\{y\,|-3\le y\le 29\}$ гэж өгсөн бол *a, q* тоог ол.

37. (0, 1), (1,4), (4,1) цэгийг дайрсан параболын тэгшитгэлийг ол.

Нэмэлт даалгавар

38. Дараах функцээс квадрат функцийг ол. Уг параболын тэгш хэмийн тэнхлэгийн тэгшитгэл зохиож, оройн цэгийг ол.

а. $y=x(x-3)$ б. $y=2(x-3)^2-2x^2+5$

в. $y=(2x-1)^2-2(2x^2-5)$ г. $y=-(x+1)^2+2x^2$

39. Хэрэв $f(x)=x^2-ax+5$ функцийн хувьд $f(1)=2,\ f(-1)=b$ бол $a+b$ нийлбэрийг ол.

40. Хэрэв $y=-\frac{1}{3}x^2$ функцийн графиктай *Ox* тэнхлэгийн хувьд тэгш хэмтэй байх парабол дээр (3, *a*) цэг оршдог бол *a* тоог ол.

41. Хэрэв координатын эх оройн цэг нь болдог парабол дээр (4,1) цэг оршдог бол уг параболын тэгшитгэлийг ол.

42. Хэрэв $y=4x^2$ функцийн графикийг *Oy* тэнхлэгийн *q* хэмжээгээр зөөхөд гарах парабол дээр (1, 5) цэг оршдог бол уг параболын тэгшитгэлийг ол.

43. Хэрэв $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$ параболын оройн цэг нь (*p*,*q*), тэгш хэмийн тэнхлэг нь $x=r$ тэгшитгэлтэй бол $p+q+r$ нийлбэрийг ол.

44. $y=-6(x+1)^2$ функц өгөв. *x* өсөж байхад *y*-ийн утга буурч байх *x*-ийн утгын олонлогийг ол.

45. $y=-\frac{1}{2}x^2$ функцийн график ашиглан дараах функцийн график байгуул.

а. $y=\frac{1}{2}x^2$ б. $y=-\frac{1}{2}x^2+3$

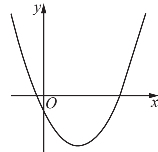
в. $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2$ г. $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2-3$

46. $y=-\frac{1}{3}(x+2)^2+1$ функцийн график координатын хавтгайн аль мөчийг дайрахгүй вэ?

47. Аль параболын оройн цэг нь координатын хавтгайн гуравдугаар мөчид байрлах вэ?

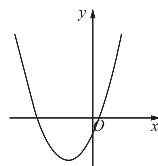
а. $y=\frac{1}{2}x^2-4$ б. $y=-5(x-2)^2$

в. $y=-3(x-2)^2+6$ г. $y=-\frac{1}{2}(x+8)^2+3$



48. Хэрэв $y=a(x-p)^2+q$ функцийн графикийг зурагт харуулсан бол *a, p, q*-ийн тэмдгийг тодорхойл.

49. Хэрэв $y=2(x+3)^2+5$ функцийн графикийг *Ox* тэнхлэгийн дагуу 2 нэгжээр баруун тийш, *Oy* тэнхлэгийн дагуу 2 нэгжээр доош зөөхөд гарах парабол дээр (*k*,3) цэг оршдог бол *k* тоог ол.



50. $y=ax^2+bx+c$ квадрат функцийн графикийг зурагт харуулсан байна. Тэгвэл *a, b, c* болон *abc* нь эерэг сөрөг алин болохыг тодорхойл.

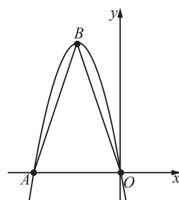
51. График нь (3, –1) цэг дээр оройтой, (1, –2) цэгийг дайрсан парабол байдаг функцийн томьёог ол.

52. Тэгш хэмийн тэнхлэг нь *x* = 2 шулуун байдаг, (1, –5), (4, 1) цэгийг дайрсан параболын тэгшитгэлийг ол.

53. Хэрэв $y=-2x^2-10x-\frac{11}{2}$ функц өгсөн бол *x* өсөж байхад *y*-ийн утга буурч байх *x*-ийн утгын олонлогийг ол.

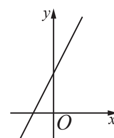
54. $y=2x^2+8x+5$ функцийн графикийн хувьд дараах өгүүлбэр үнэн эсэхийг тогтоож, тайлбарла.

а. Oy тэнхлэгтэй (0, 5) цэгээр огтлолцоно.
б. Оройн цэг нь (2, –3) координаттай.
в. Дүр нь $\{y \mid y \geq -2\}$ олонлог байна.
г. $x > -2$ үед x-ийн утга өсөж байхад y-ийн утга буурна.
д. $y = 2x^2$ функцийн графикийг Oy тэнхлэгийн дагуу 2 нэгжээр доош, Ox тэнхлэгийн дагуу 3 нэгжээр зүүн тийш зөөхөд өгсөн функцийн график гарна.
г. Ox тэнхлэгтэй огтлолцохгүй.

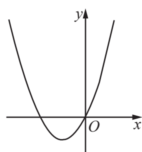


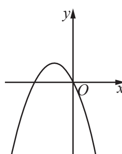
55. Хэрэв $y = -x^2 + bx + c$ функцийн график Ox тэнхлэгтэй A, O цэгт огтлолцдог ба тэгш хэмийн тэнхлэг нь $x = -3$ шулуун бол ABO гурвалжны талбайг ол. Зураг харна уу.

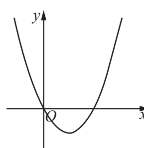
56. Ox тэнхлэгтэй (–2, 0), (4, 0) цэгүүдээр огтлолцдог ба (5, 2) цэгийг дайрсан параболын Oy тэнхлэгтэй огтлолцох цэгийг ол.

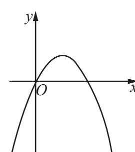


57. $y = ax + b$ функцийн графикийг зурагт харуулав. Тэгвэл $y = ax^2 + bx$ квадрат функцийн график аль нь байх боломжтой вэ?

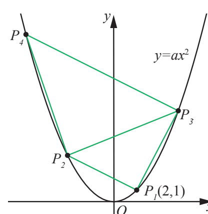
а.


б.


в.


г .


58. Зурагт харуулсан $y = ax^2$ парабол дээр P_1, P_2, P_3, P_4 цэг орших ба P_1P_2 , P_3P_4 хэрчмийн налалт нь $-\frac{1}{2}$, P_2P_3 хэрчмийн налалт нь $\frac{1}{2}$ байв. P_1 цэгийн координат нь (2, 1) байсан бол $\triangle P_1P_2P_3$, $\triangle P_2P_3P_4$ гурвалжнуудын талбайн харьцааг ол.



5.3. $y = \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$ ФУНКЦ

$y = \frac{a}{x}(a \neq 0)$ функцийн графикийн чанарыг мэдэхийн тулд дараах жишээгээр эхэлье.

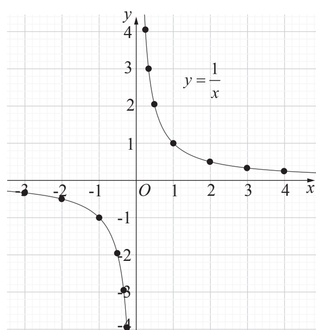
Жишээ 1. $y = \frac{1}{x}$ ба $y = -\frac{1}{x}$ функцийн графикийг утгын хүснэгт зохиох замаар байгуул.

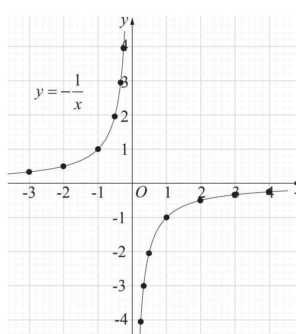
Бодолт. Утгын хүснэгтийг дараах байдлаар зохиоё.

x	–3	–2	–1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	–1	–2	–3	–4	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$-\frac{1}{x}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	–4	–3	–2	–1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$

Функцийн график координатын тэнхлэгүүдтэй огтлолцохгүй. Учир нь $y = 0$ үед $\frac{1}{x} = 0$ тэгшитгэл гарах ба энэ тэгшитгэл нь шийдгүй тул Ox тэнхлэгтэй огтлолцохгүй. $x = 0$ үед $\frac{1}{0}$ тодорхойлогдохгүй тул Oy тэнхлэгтэй огтлолцохгүй.

Утгын хүснэгтээс харахад $x < 0$ үед x-ийн утга өсөж байхад $\frac{1}{x}$-ийн утга буурч, $x > 0$ үед x-ийн утга өсөж байхад $\frac{1}{x}$-ийн утга мөн буурч байна. $x < 0$ үед x-ийн утга өсөж байхад $-\frac{1}{x}$-ийн утга өсөж, $x > 0$ үед x-ийн утга өсөж байхад $-\frac{1}{x}$-ийн утга мөн өсөж байна. Энэ дүгнэлт болон утгын хүснэгтийг ашиглан функц тус бүрийн графикийг байгуулж харууллаа.

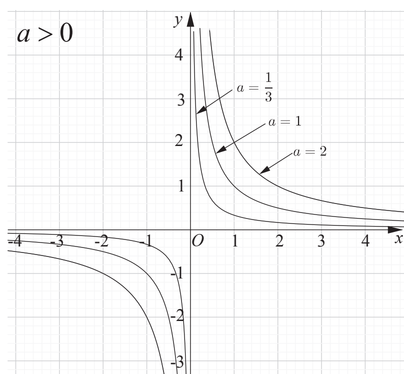


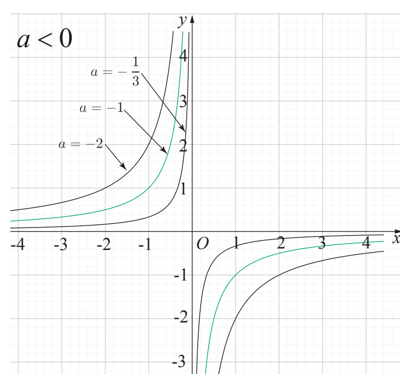


Дүгнэлт.

- $y = \frac{1}{x}$ ба $y = -\frac{1}{x}$ функцийн дүр $]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$ байна.
- $y = \frac{1}{x}$ функцийн график нь координатын хавтгайн 1 ба 3 дугаар мөчид, $y = -\frac{1}{x}$ функцийн график нь 2 ба 4 дүгээр мөчид байна.
- Тодорхойлогдох мужийн аливаа x -ийн хувьд $\left(x, \frac{1}{x}\right)$ ба $\left(-x, -\frac{1}{x}\right)$ цэгүүд $y = \frac{1}{x}$ функцийн график дээр орших тул уг функцийн график координатын эхийн хувьд тэгш хэмтэй.
- Тодорхойлогдох мужийн аливаа x -ийн хувьд $\left(x, \frac{1}{x}\right)$ ба $\left(-x, -\frac{1}{x}\right)$ цэгүүд $y = -\frac{1}{x}$ функцийн график дээр орших тул уг функцийн график координатын эхийн хувьд тэгш хэмтэй.

Одоо $y = \frac{a}{x}$ функцийн графикийг сонирхъё. a тооноос хамаарч $y = \frac{a}{x}$ функцийн график хэрхэн өөрчлөгдөж байгааг ажиглахын тулд $|a|$-ийн утга нэгээс их, бага байх хэд хэдэн тохиолдолд графикийг нь байгуулж зурагт харууллаа.





Дүгнэлт. $y=\dfrac{a}{x}(a\neq 0)$ функцийн графикийн чанар

- Бодит тоог тэгт хувааж болохгүй тул хуваарь тэгээс ялгаатай байх бүх бодит тоо тодорхойлогдох муж нь болно. Өөрөөр хэлбэл $]-\infty,0[\cup]0,\infty[$ байна.
- Функцийн дүр нь $]-\infty,0[\cup]0,\infty[$ байна.
- $a>0$ үед функцийн график нь координатын хавтгайн 1, 3 дугаар мөчид, $a<0$ үед функцийн график нь координатын хавтгайн 2, 4 дүгээр мөчид оршино.
- $|a|$ багасах тусам функцийн график координатын тэнхлэгүүд рүү ойртоно. Харин $|a|$ ихсэх тусам функцийн график координатын тэнхлэгүүдээс холдоно.
- $y=\pm x$ шулууны хувьд тэгш хэмтэй.
- Координатын эхийн хувьд тэгш хэмтэй.

5.4. $y=ax^n$ ХЭЛБЭРИЙН ФУНКЦИЙН ГРАФИК

Энэ сэдвийн хүрээнд $n=-2,\ -1,\ \dfrac{1}{2},\ 1,\ 2, 3$ үед $y=ax^n\ (a\neq 0)$ хэлбэрийн функцийн графикийг байгуулна. Ийм хэлбэрийн функцийг **зэрэгт функц** гэж нэрлэдэг. Энэ тухай 11 дүгээр ангид илүү дэлгэрэнгүй үзнэ. $n=-1,\ 1,\ 2$ тохиолдлыг өмнөх хэсгүүдэд авч үзсэн тул энд графикийг нь дахин байгуулахгүй.

1. $n=-2$ үед $y=\dfrac{a}{x^2}$ функц болно. Уг функцийн бутархайн хуваарьд x^2 байгаа тул тодорхойлогдох муж нь $]-\infty,0[\cup]0,\infty[$ байна. $y=\dfrac{a}{x^2}$ функцийн графикийн чанарыг ажиглахын тулд дараах жишээг авч үзье.

Жишээ 1. $y=\dfrac{1}{x^2}$ ба $y=-\dfrac{1}{x^2}$ функцийн графикийг утгын хүснэгт зохиох замаар байгуул.

Бодолт. Утгын хүснэгтийг дараах байдлаар зохиоё.

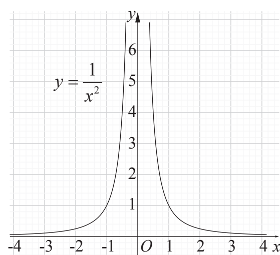
x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	4	9	16	16	9	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$
$-\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{4}$	-1	-4	-9	-16	-16	-9	-4	-1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{9}$

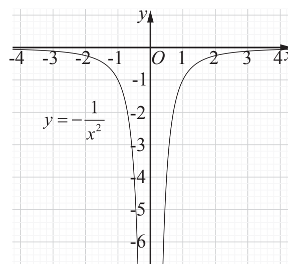
Функцийн график координатын тэнхлэгүүдтэй огтлолцохгүй. Учир нь $y = 0$ үед $\frac{1}{x} = 0$ тэгшитгэл гарах ба энэ тэгшитгэл нь шийдгүй тул Ox тэнхлэгтэй огтлолцохгүй. $x = 0$ үед $\frac{1}{0}$ тодорхойлогдохгүй тул Oy тэнхлэгтэй огтлолцохгүй. $y = \frac{1}{x^2}$ ба $y = -\frac{1}{x^2}$ функцийн график нь Oy тэнхлэгийн хувьд тэгш хэмтэй гэдгийг үндэслэж болно. $y = \frac{1}{x^2}$ функцийн дүр нь $]0, \infty[$, харин $y = -\frac{1}{x^2}$ функцийн дүр нь $]-\infty, 0[$ байна.

$x < 0$ үед x-ийн утга өсөж байхад $\frac{1}{x^2}$ -ийн утга өсөж, харин $x > 0$ үед x-ийн утга өсөж байхад $\frac{1}{x^2}$ -ийн утга буурна.

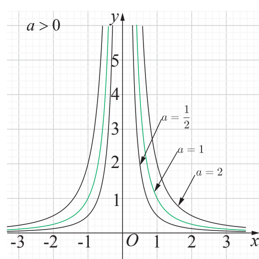
$x < 0$ үед x-ийн утга өсөж байхад $-\frac{1}{x^2}$ -ийн утга буурч, харин $x > 0$ үед x-ийн утга өсөж байхад $-\frac{1}{x^2}$-ийн утга өснө.

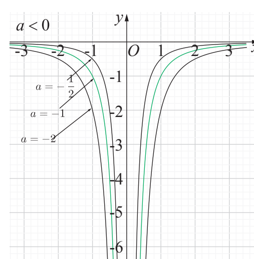
Эдгээр дээр тулгуурлан функцийн графикийг доорх зурагт байгуулж харууллаа.





a тооноос хамаарч $y = \frac{a}{x^2}$ функцийн график хэрхэн өөрчлөгдөж байгааг ажиглахын тулд $|a|$ -ийн утга нэгээс их, бага байх хэд хэдэн тохиолдолд графикийг нь байгуулж зурагт харуулсан байна.





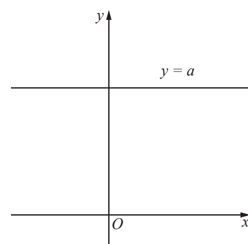
Дүгнэлт.

- Бодит тоог тэгт хувааж болохгүй тул $y = \frac{a}{x^2}$ функцийн тодорхойлогдох муж $]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$ байна.
- $a > 0$ үед функцийн дүр нь $]0, \infty[$, $a < 0$ үед $]-\infty, 0[$ байна.
- Координатын тэнхлэгүүдийг огтлохгүй.

- $\left(x,\ a\cdot\frac{1}{x^2}\right),\left(-x,\ a\cdot\frac{1}{x^2}\right)$ цэгүүд функцийн график дээр орших тул Oy тэнхлэгийн хувьд тэгш хэмтэй.

2. $y = a$ (a нь тогтмол тоо) хэлбэрийн функцийг **тогтмол функц** гэнэ.

- График нь x тэнхлэгтэй параллел шулуун байна.
- Тодорхойлогдох муж нь $]-\infty,\infty[$ байна.
- Функцийн дүр нь $\{a\}$ байна.
- Oy тэнхлэгтэй $(0,\ a)$ цэгт огтлолцох ба Ox тэнхлэгтэй огтлолцохгүй.
- $(x,\ a),(-x,\ a)$ цэгүүд функцийн график дээр орших тул Oy тэнхлэгийн хувьд тэгш хэмтэй.



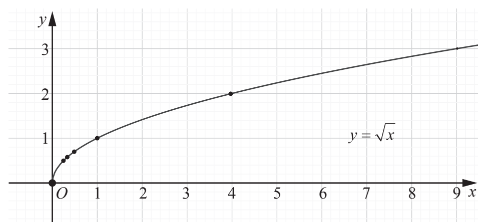
3. $n=\frac{1}{2}$ үед $y=a\sqrt{x}$ функц болно. Арифметик квадрат язгуурын тодорхойлолт ёсоор $x \geq 0$ байх тул энэ функцийн тодорхойлогдох муж нь $[0,\infty[$ байна.

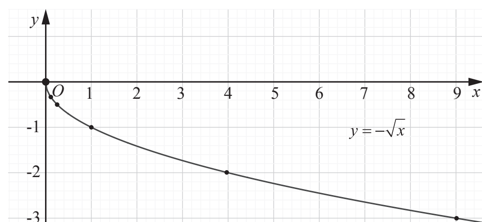
$y=a\sqrt{x}$ функцийн графикийн чанарыг ажиглахын тулд дараах жишээг авч үзье.

Жишээ 2. $y=\sqrt{x}$ ба $y=-\sqrt{x}$ функцийн графикийг утгын хүснэгт зохиох замаар байгуул.
Бодолт. Утгын хүснэгтийг дараах байдлаар зохиоё.

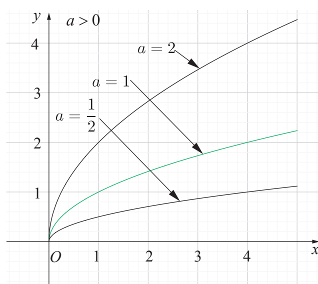
x	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	4	9
$\sqrt{x}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$-\sqrt{x}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	–1	–2	–3

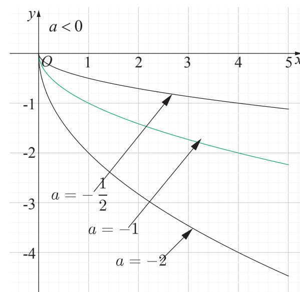
Утгын хүснэгтээс харахад x-ийн утга өсөж байхад $\sqrt{x}$ - ийн утга өсөж байгаа ба харин $-\sqrt{x}$-ийн утга буурч байна.
Сөрөг биш бодит тооны арифметик квадрат язгуур нь сөрөг биш тоо гардаг тул $y=\sqrt{x}$ функцийн дүр нь $[0,\infty[$, харин $y=-\sqrt{x}$ функцийн дүр нь $]-\infty,\ 0]$ байна.
Утгын хүснэгтийг ашиглан функцийн графикийг зурж доорх зурагт харуууллаа.





a-ийн утгаас хамаарч $y=a\sqrt{x}$ функцийн график хэрхэн өөрчлөгдөж байгааг ажиглахын тулд $|a|$-ийн утга нэгээс их, бага байх хэд хэдэн тохиолдолд графикийг нь байгуулж зурагт харуулсан байна.



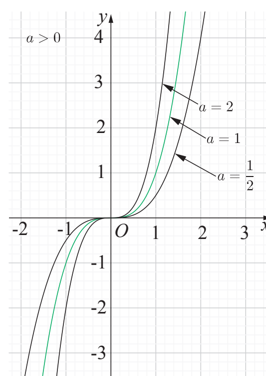


Дүгнэлт. *$y = a\sqrt{x}$ функцийн графикийн чанар*

- Тодорхойлогдох муж нь $[0,\infty[$ байна.
- $y = a\sqrt{x}$ функцийн дүр нь $a > 0$ үед $[0,\infty[$, $a < 0$ үед $]-\infty,\ 0]$ байна.
- Координатын эх (0,0) цэгийг дайрна.

4. $n = 3$ үед $y = ax^3$ функц болох ба **куб функц** гэнэ.

$y = ax^3$ функцийн график нь дараах чанартай.



- Тодорхойлогдох муж нь $]-\infty,\infty[$ байна.
- Функцийн дүр нь $]-\infty,\infty[$ байна.
- Координатын эх (0,0) цэгийг дайрна.
- $(x,\ ax),(-x,-ax)$ цэгүүд функцийн график дээр орших тул координатын эхийн хувьд тэгш хэмтэй.

59. Дараах функцийн тодорхойлогдох мужийг ол.

а. $y = \dfrac{x+1}{2x^2-2}$ б. $y = \dfrac{x}{6x+2}$

в. $y = \dfrac{x+1}{(x-2)^2}$ г. $y = \dfrac{5x-1}{25x^2-1}$

60. Дараах функцийн тодорхойлогдох мужийг ол.

а. $y = \sqrt{2x-1}$ б. $y = \sqrt{4x+5}$ в. $y = \sqrt{-3x+7}$ г. $y = \sqrt{-5x-1}$

61. Дараах функцийн графикийг байгуул.

а. $y = \dfrac{2}{x}$ б. $y = -2\sqrt{x}$ в. $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$ г. $y = \dfrac{1}{2}x^3$ д. $y = -\dfrac{1}{2}x^3$

е. $y = \dfrac{1}{2x}$ ё. $y = \dfrac{1}{2x^2}$ ж. $y = -3\sqrt{x}$ з. $y = 2x^3$ и. $y = -\dfrac{1}{2x^2}$

62. Тодорхойлогдох муж нь өгсөн функцийн дүрийг олж графикийг нь байгуул.

а. $y = \dfrac{3}{x}, \{x \mid -3 \le x \le -\dfrac{1}{3}\}$ б. $y = -\dfrac{1}{2}\sqrt{x}, \{x \mid 4 \le x \le 16\}$

в. $y = -\dfrac{1}{2}x^3, \{x \mid 0 \le x \le 2\}$ г. $y = -2\sqrt{x}, \{x \mid 4 \le x \le 16\}$

5.5. $y = a^x$ ФУНКЦИЙН ГРАФИК

Тодорхойлолт. $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ хэлбэрийн функцийг **илтгэгч функц** гэдэг.

Илтгэгч функцийн графикийн чанарыг ажиглахын тулд дараах жишээг авч үзье.

Жишээ 1. Утгын хүснэгтийг зохиох замаар $y = 2^x$ ба $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ функцийн графикийг байгуул.

Бодолт. Утгын хүснэгтийг дараах байдлаар зохиоё.

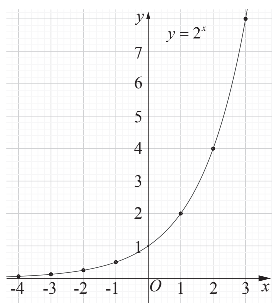
x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
2^x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	1	4	8	16
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

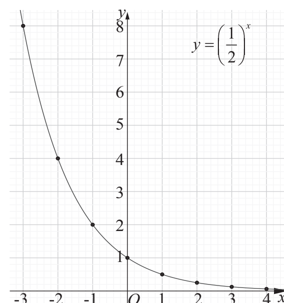
Утгын хүснэгтээс харахад $y = 2^x$ ба $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ функцүүдийн график y тэнхлэгтэй (0,1) цэгт огтлолцож байна. Харин Ox тэнхлэгтэй огтлолцохгүй. Учир нь тэгээс ялгаатай ямар ч бодит тооны зэрэг нь тэгтэй тэнцэхгүй.

Эерэг бодит тооны зэрэг нь эерэг too байх тул илтгэгч функцийн дүр нь $]0,\infty[$ байна.

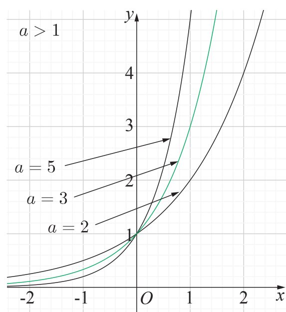
Утгын хүснэгтээс харвал x-ийн утга өсөхөд 2^x-ийн утга өсөж, $\left(\frac{1}{2}\right)^x$-ийн утга буурч байна.

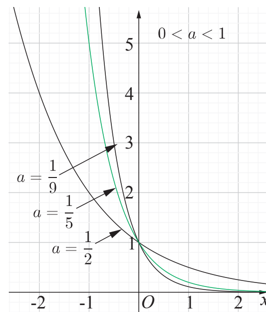
Эдгээр дүгнэлт дээр тулгуурлан функц тус бүрийн графикийг байгуулж харууллаа.





$0 < a < 1$ болон $a > 1$ байх хэд хэдэн тохиолдолд $y = a^x$ функцийн графикийг байгуулж зурагт харуулсан байна. a тооноос хамааран функцийн график хэрхэн өөрчлөгдөж буйг ажиглая.

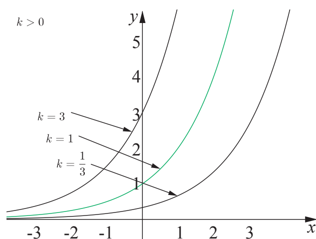


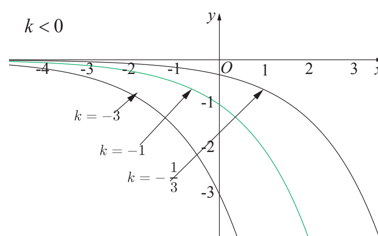


Зургаас харахад $0 < a < 1$ үед a багасах тусам функцийн график тэнхлэгүүд рүү ойртож байна. Харин $a > 1$ үед a ихсэх тусам функцийн график тэнхлэгүүд рүү ойртож байна. Ямар ч эерэг бодит тооны зэрэг нь эерэг тоо байх тул функцийн утга үргэлж эерэг байна. Өөрөөр хэлбэл дүр нь $]0,\infty[$ байна.

$y = ka^x$ функцийн график

k тооноос хамааран $y = ka^x$ функцийн график хэрхэн өөрчлөгдөхийг ажиглая. Үүний тулд $a > 1$ үед $|k|$-ийн утга нэгээс их, бага байх хэд хэдэн тохиолдолд графикийг нь байгуулж зурагт харуулсан байна. Дүгнэлтийг өөрсдөө хийнэ үү.





$0 < a < 1$ үед $|k|$-ийн утга нэгээс их, бага байх тохиолдолд $y = ka^x$ функцийн графикийг нь байгуулж $|k|$-ийн утгаас хэрхэн хамаарах талаар дүгнэлт хийнэ үү.

63. Дараах функцийн графикийг байгуул.

а. $y = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ б. $y = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$ в. $y = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$ г. $y = -2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$

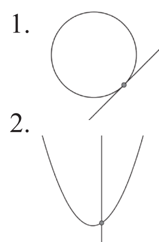
д. $y = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$ е. $y = 3 \cdot 2^x$ ё. $y = -\frac{1}{3} \cdot 2^x$ ж. $y = -3 \cdot 2^x$

64. Тодорхойлогдох муж нь өгсөн завсарт байх өгсөн функцийн дүрийг олж графикийг нь байгуул.

а. $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x,\ \{x \mid -3 \le x \le 0\}$ б. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x,\ \{x \mid -2 \le x \le 2\}$

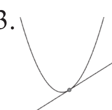
в. $y = -3 \cdot 2^x,\ \{x \mid -2 \le x \le 2\}$ г. $y = \frac{1}{3} \cdot 2^x,\ \{x \mid -2 \le x < 1\}$

5.6. МУРУЙН ШҮРГЭГЧ, ШҮРГЭГЧИЙН НАЛАЛТ



Шүргэгч гэдэг үг нь Латин хэлний "хүрэх" гэсэн утгатай tangens гэсэн үгнээс гаралтай.
Бид тойргийн хувьд шүргэгч шулууныг мэднэ. Тойрогтой зөвхөн нэг ерөнхий цэгтэй шулууныг тойргийн шүргэгч гэдэг (Зураг 1).
Гэтэл зарим муруйн хувьд энэ тодорхойлолттой нийцэхгүй байх тохиолдол байдаг. Зураг 2-оос парабол ба шулуун нэг ерөнхий цэгтэй байгаа боловч бидний ярьж байгаа шүргэгч шулуун биш гэдэг нь

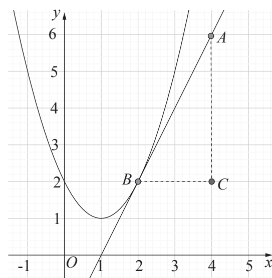
тодорхой. Харин Зураг 3-т зурагт байгаа шулуун нь параболын шүргэгч юм. Шүргэгчийн тодорхойлолтыг функцийн уламжлал сэдвийг үзэх үед илүү нарийвчлан тодорхойлно. Энд бид муруйн шүргэгчийн тухай төсөөлөлтэй болж баримжаалан зурах ба налалтыг нь ойролцоогоор олж сурна.



Жишээ 1: $y=(x-1)^2+1$ параболын (2, 2) цэг дээрх шүргэгч шулууныг баримжаалан зурж, налалтыг тооцоол.

Бодолт.

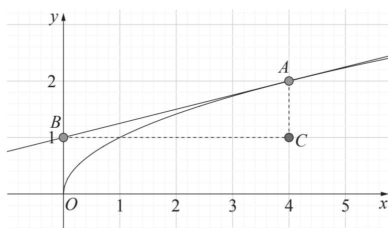
$y=(x-1)^2+1$ парабол ба $B(2, 2)$ цэг дээрх параболын шүргэгч шулууныг баримжаалан зурж харууллаа. Шүргэгч шулууны налалтыг олохын тулд уг шулуун дээр дурын A цэгийг сонгон авч зурагт харуулснаар ABC тэгш өнцөгт гурвалжин байгуулъя. Шүргэгч шулууны налалт нь AB хэрчмийн налалт байх тул $\frac{AC}{BC}$ харьцаагаар тодорхойлогдоно. Иймд өгсөн муруйн $B(2,2)$ цэг дээрх шүргэгч шулууны налалт нь $\frac{4}{2}=2$ -той тэнцүү байна.



Жишээ 2: $y=\sqrt{x}$ функцийн графикийн (4, 2) цэг дээрх шүргэгч шулууныг баримжаалан зурж, налалтыг тооцоол.

Бодолт.

$y=\sqrt{x}$ функцийн график ба уг муруйн (4, 2) цэг дээрх шүргэгч шулууныг зурж харууллаа. Жишээ 1 дээрх аргаар ABC тэгш өнцөгт гурвалжин байгуулж шүргэгч шулууны налалтыг олбол $\frac{BC}{AC}=4$ гэж гарна.



65. Өгсөн муруйн өгсөн цэг дээрх шүргэгч шулууныг баримжаалан зурж, налалтыг ол.

а. $y=\frac{2}{x},\ A(-2,-1)$　　б. $y=2x^2,\ A(-1,2)$　　в. $y=-2\sqrt{x},\ A(1,-2)$

г. $y=x^3,\ A(-1,-1)$　　д. $y=\frac{1}{x^2},\ A\left(-2,\frac{1}{4}\right)$　　е. $y=2^x,\ A(1,2)$

ё. $y=-3^x,\ A\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$　　ж. $y=-2x^3,\ A(-1,2)$　　з. $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x,\ A(-2,-4)$

VI БҮЛЭГ. ТЭГШИТГЭЛ, ТЭНЦЭТГЭЛ БИШ

Энэ бүлэг сэдвийг судалснаар дараах мэдлэг чадваруудыг эзэмшинэ.

- *Нэг хувьсагчтай шугаман тэнцэтгэл биш, тэнцэтгэл бишийн системийг бодох*
- *Квадрат тэгшитгэл бодох*
  - *Үржигдэхүүн болгон задлах*
  - *Томьёо ашиглах*
  - *Шийдтэй эсэхийг дискриминантаар шинжлэх*
- *Квадрат тэгшитгэлд шилждэг рационал тэгшитгэл бодох, хэрэглэх*
- *Хоёр хувьсагчтай шугаман тэнцэтгэл биш, тэнцэтгэл бишийн системийн шийдийг координатын хавтгайд дүрслэх*
- *Хялбар илтгэгч тэгшитгэл бодох, графикийн аргаар бодох*

6.1. НЭГ ХУВЬСАГЧТАЙ ШУГАМАН ТЭНЦЭТГЭЛ БИШ БА ТЭДГЭЭРИЙН СИСТЕМ

Тодорхойлолт. $ax + b$ хэлбэрийн хоёр шугаман илэрхийллийг хоорондоо нь их багын тэмдгээр холбосныг нэг хувьсагчтай **шугаман тэнцэтгэл биш** гэнэ.

Жишээлбэл: $2x+3>x-3$

Тодорхойлолт. Өгсөн тэнцэтгэл бишийн хувьсагчийн оронд орлуулахад үнэн тоон тэнцэтгэл биш үүсгэх тоог **тэнцэтгэл бишийн шийд** гэнэ.

Жишээлбэл: $x=5$ тоог $2x+3>x-3$ тэнцэтгэл бишид орлуулахад $13>2$ гэсэн үнэн тоон тэнцэтгэл биш үүсэх тул 5 нь уг тэнцэтгэл бишийн шийд болно.
$x=-7$ тоог $2x+3>x-3$ тэнцэтгэл бишид орлуулахад $-11>-10$ гэсэн худал тоон тэнцэтгэл биш үүсэх тул –7 нь уг тэнцэтгэл бишийн шийд болохгүй.

Тодорхойлолт. Өгсөн тэнцэтгэл бишийн шийд болдог тооны олонлогийг **шийдийн олонлог** гэнэ. Өгсөн тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлогийг олохыг тэнцэтгэл бишийг **бодох** гэнэ. Шийдийн олонлог нь давхцах тэнцэтгэл бишүүдийг **тэнцүү чанартай** тэнцэтгэл бишүүд гэнэ.

Тэнцэтгэл бишийг бодохдоо тоон тэнцэтгэл бишийн дараах чанаруудыг ашигладаг.

Чанар. a,b,c нь бодит тоо

1. Хэрэв $a>b$ бол $a+c>b+c$ байна.
2. Хэрэв $a>b$ ба $c>0$ бол $ac>bc$ байна.
3. Хэрэв $a>b$ ба $c<0$ бол $ac<bc$ байна. Өөрөөр хэлбэл тэнцэтгэл бишийн хоёр талыг тэгээс ялгаатай сөрөг тоогоор үржүүлэхэд тэнцэтгэл бишийн тэмдэг эсрэгээр өөрчлөгдөнө.

Жишээлбэл: $2 < 5$ гэсэн үнэн тоон тэнцэтгэл бишийн хоёр талд (-4)-ийг нэмбэл $-2 < 1$ болж үнэн тоон тэнцэтгэл биш үүснэ.

Жишээлбэл: $2 < 5$ гэсэн үнэн тоон тэнцэтгэл бишийн хоёр талыг (-4) -өөр үржүүлж, тэнцэтгэл бишийн тэмдгийг эсрэгээр өөрчилбөл $-8 > -20$ болж үнэн тоон тэнцэтгэл биш үүснэ.
Тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлогийг
- Тоон шулуун дээр дүрсэлж
- Тоон завсар хэлбэрт бичиж

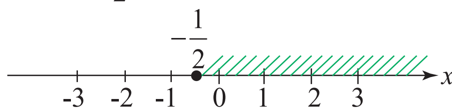
болдог.

Жишээ 1. $-\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}\le\frac{5}{6}$ тэнцэтгэл бишийг бод.

Бодолт. $-\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}\le\frac{5}{6}$

Тэнцэтгэл бишийн хоёр талыг 6-аар үржүүлбэл $6\cdot\left(-\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}\right)\le 6\cdot\frac{5}{6}$ болж $-4x+3\le 5$ гарна. Энэ тэнцэтгэл бишийн хоёр талд (-3)-ыг нэмбэл $-4x\le 2$ болно. Тэнцэтгэл бишийн хоёр талыг (-4) -д хуваавал $x\ge -\frac{1}{2}$ гэсэн тэнцүү чанартай тэнцэтгэл биш гарна.

Тоон шулуун дээр дүрсэлбэл:



Тоон завсар хэлбэрт бичвэл тэнцэтгэл бишийн шийд нь: $x\in\left[-\frac{1}{2},\infty\right[$ болно.

Жишээ 2. Дараах тэнцэтгэл бишийг бод.

а. $7-(3x+5)\ge 2(x-4)-5x$ б. $3(x+4)-5<2(x-3)+x$

Бодолт. а. $7-(3x+5)\ge 2(x-4)-5x$. Хэрэв хаалт нээвэл $7-3x-5\ge 2x-8-5x$, хялбарчилбал $-3x+2\ge -3x-8$ болно. Хэрэв хоёр талд нь $3x$-ийг нэмбэл $2\ge -8$ болно. Иймд өгсөн тэнцэтгэл биш нь аливаа x тооны хувьд үнэн. Эндээс шийдийн олонлог нь $]-\infty,\infty[$ болно.

б. $3(x+4)-5<2(x-3)+x$. Хэрэв хаалт нээж хялбарчилбал $3x+12-5<2x-6+x$ эндээс $3x+7<3x-6$ болж, хоёр талд нь $(-3x)$-ийг нэмбэл $7<-6$ болно.
Иймд өгсөн тэнцэтгэл биш нь аливаа x тооны хувьд худал. Эндээс өгсөн тэнцэтгэл биш шийдгүй буюу шийдийн олонлог нь $\varnothing$ байна.

Жишээ 3. Дараах давхар тэнцэтгэл бишийг бод. $-6\le\frac{2x+5}{-3}<1$

Бодолт. $-6\le\frac{2x+5}{-3}<1$ тэнцэтгэл бишийг (-3)-аар үржүүлбэл $18\ge 2x+5>-3$ болно. Тэнцэтгэл бишийг $-3<2x+5\le 18$ гэж бичээд бүх хэсэг дээр (-5)-ийг нэмбэл

$-8 < 2x \le 13$ болж, бүх хэсгийг 2-т хуваавал шийдийн олонлог нь $-4 < x \le 6\frac{1}{2}$ болно.

Тоон шулуун дээр дүрсэлбэл: -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 6.5 7 x

Тоон завсар хэлбэрт бичвэл шийдийн олонлог нь: $\left]-4,\ 6\frac{1}{2}\right]$ болно.

Жишээ 4. Маралмаа өмнөх гурван улирлын туш тус бүр 78, 72, 86 үнэлгээтэй дүгнэгдсэн. Тэр жилийн эцсээр 80-аас дээш үнэлгээтэй гарахын тулд IV улиралд ямар үнэлгээ авах ёстой вэ?

Бодолт. Жилийн эцсээр 80-аас дээш үнэлгээтэй гарахын тулд дөрвөн улирлын дундаж үнэлгээ 80-аас дээш байх хэрэгтэй. Иймд

I улирал	II улирал	III улирал	IV улирал	Жилийн эцсээр хамгийн багадаа
78	72	86	x	80

Эндээс $\frac{78+72+86+x}{4} \ge 80$ болно.

$\frac{78+72+86+x}{4} \ge 80$ тэнцэтгэл бишийн хоёр талыг 4 -өөр үржүүлбэл

$78+72+86+x \ge 320$ тэнцэтгэл бишийг хялбарчилбал $236+x \ge 320$ тэнцэтгэл бишийн хоёр талд (–236)-ыг нэмбэл $x \ge 84$ болно.

Эндээс Маралмаа жилийн эцсээр 80-аас дээш үнэлгээтэй гарахын тулд IV улиралд 84-өөс дээш үнэлгээ авах шаардлагатай.

Тодорхойлолт. $\begin{cases} a_1x + b_1 > c_1 \\ a_2x + b_2 > c_2 \end{cases}$-ийг хоёр шугаман тэнцэтгэл бишийн **систем** гэнэ.

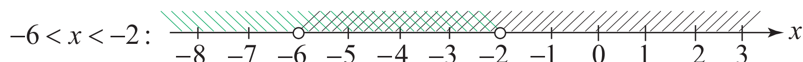
Энэ системийн шийд нь шугаман тэнцэтгэл биш бүрийн шийдийн олонлогийн огтлолцол байна.

Жишээ 5. Дараах тэнцэтгэл бишийн систем бод. $\begin{cases} 3x+5 > -13 \\ 3x+5 < -1 \end{cases}$

Бодолт. $\begin{cases} 3x+5 > -13 \\ 3x+5 < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x > -18 \\ 3x < -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -6 \\ x < -2 \end{cases}$ болно.

Тэнцэтгэл бишийн системийн шийдийн олонлогийг тоон шулуун дээр дүрсэлбэл:

$-6 < x < -2:$



Тэнцэтгэл бишийн системийн шийдийн олонлогийг тоон завсар хэлбэрт бичвэл: $x \in]-6,-2[$ болно.

1. Тэнцэтгэл бишийг бод.
а. $x+3>5$ б. $4x<12$ в. $10x>-40$
г. $x+6<8$ д. $3+x>-10$ е. $4x-3<13$
ё. $-x-8>-17$ ж. $-3+x<19$ з. $-2x+1\le 13$
и. $6+x\le -8$ й. $x-10\ge -6$ к. $4x-4\ge 12$

2. Тэнцэтгэл бишийг бод.
а. $x-4\ge 5x+12$ б. $4(x-2)<3x-4$
в. $3x+1>x-5$ г. $-2(x+1)\ge 4(x+3)$
д. $-2x+1\le 3x+11$ е. $7-2(x+1)\le 3(x-5)$
ё. $-5x+12<x-3$ ж. $2(4x-5)-3x\le -15$
з. $x-3(x+1)\ge 7$ и. $7x-12<4x+6$
й. $3(x-1)+2x<6x+3$ к. $11-6x>2x+7$

3. Тэнцэтгэл бишийг бод.
а. $\frac{2x+1}{3}>\frac{x-2}{2}$ б. $\frac{3x+1}{5}\ge 2$
в. $\frac{x+3}{2}>\frac{x-4}{3}$ г. $15.6-1.3x<-5.2$
д. $\frac{2}{5}x+\frac{3}{10}<-\frac{1}{2}$ е. $3+\frac{2}{7}x>x-2$

4. Тэнцэтгэл бишийг бод.
а. $5a-11\ge 2a-5$ б. $8-(6+5m)>-9m-(3-4m)$
в. $-8n+5>-2n-12$ г. $-6(p-1)+2p\le -2(2p-3)$
д. $2(n+3)-4\le 5n-1$ е. $9(w-1)-3w\ge -2(5-3w)+1$
ё. $-5(x+2)-3<3x+11$ з. $\frac{3x}{8}+\frac{x}{4}<-4$
ж. $7-2(x+3)\ge 4x-6(x-3)$ й. $\frac{2y}{5}+\frac{y}{10}<-2$
и. $-3-6(x-5)\le 2(7-3x)+1$

5. Тэнцэтгэл бишийг бод.
а. $-3\le 2x+5<7$ б. $-7<-\frac{3}{4}x-1<11$
в. $2<3x-4\le 19$ д. $-21\le -\frac{2}{3}x+9<7$
г. $-0.5\le 0.3-x\le 1.7$
е. $-8.2<1.4-x<-0.9$

6. Шугаман тэнцэтгэл бишийн системийг бод.
а. $\begin{cases}4(x-1)\le 20\\ x+6>9\end{cases}$ б. $\begin{cases}\frac{2x}{5}+\frac{x}{10}<-2\\ x-3>2\end{cases}$ в. $\begin{cases}\frac{3}{5}x+\frac{1}{2}>\frac{3}{10}\\ -4x>1\end{cases}$

г. $\begin{cases}-3(x+2)>15\\ x-3\le -1\end{cases}$ д. $\begin{cases}-2x-7\le 3\\ 2x\le 0\end{cases}$ е. $\begin{cases}\frac{2}{3}x-\frac{5}{6}\le 0\\ -3x<-2\end{cases}$

ё. $\begin{cases}\frac{3x}{8}+\frac{x}{4}<-3\\ x+1>-5\end{cases}$ ж. $\begin{cases}-3x+5\le 17\\ 5x\le 0\end{cases}$

6.2. КВАДРАТ ТЭГШИТГЭЛ

Тодорхойлолт. Хэрэв $a,b,c \in \mathbb{R}$ бөгөөд $a \neq 0$ ба x хувьсагч бол $ax^2+bx+c=0$ хэлбэрийн тэгшитгэлийг **квадрат тэгшитгэл** гэнэ. a,b,c-г коэффицент гэх ба c-г **сул гишүүн** гэдэг.

Жишээлбэл, $2x^2-3x+1=0$ квадрат тэгшитгэлийн хувьд $a=2,\ b=-3,\ c=1$ байна.

Тодорхойлолт. $ax^2+bx+c=0$ квадрат тэгшитгэлийн a,b,c коэффицент нь бүгд тэгээс ялгаатай байвал уг тэгшитгэлийг **гүйцэд** квадрат тэгшитгэл гэнэ.

Хэрэв $ax^2+bx+c=0$ тэгшитгэлийн b,c коэффицентийн ядаж нэг нь тэгтэй тэнцүү ба $a \neq 0$ бол уг тэгшитгэлийг **гүйцэд биш** квадрат тэгшитгэл гэнэ.

Тодорхойлолт. $ax^2+bx+c=0$ тэгшитгэлийн x хувьсагчийн оронд орлуулахад үнэн тоон тэнцэтгэл үүсгэх тоог уг тэгшитгэлийн **шийд** гэнэ.

Жишээ 1. –1, 1 нь $2x^2-3x+1=0$ тэгшитгэлийн шийд болох эсэхийг шалгая.
Бодолт. Хэрэв $x=-1$ бол $2\cdot(-1)^2-3\cdot(-1)+1=2+3+1=6,\ 6=0$ худал тул $x=-1$ уг тэгшитгэлийн шийд болохгүй.
Хэрэв $x=1$ бол $2\cdot 1^2-3\cdot 1+1=2-3+1=0,\ 0=0$ үнэн тул $x=1$ уг тэгшитгэлийн шийд болно.

Чанар 1. a,b бодит тооны хувьд хэрэв $a\cdot b=0$ бол эдгээрийн ядаж нэг нь тэгтэй тэнцүү байна. Өөрөөр хэлбэл $a=0$ эсвэл $b=0$ байна.

Жишээ 2. Дараах квадрат тэгшитгэлийг үржигдэхүүн болгон задалж бод.
а. $3x^2=5x$ б. $-5x+2x^2=3$ в. $4x^4=12x-9$

Бодолт. а. $3x^2=5x$ тэгшитгэлийг $3x^2-5x=0$ хэлбэрт бичиж, ерөнхий үржигдэхүүн хаалтын өмнө гаргавал $x(3x-5)=0$, чанар 1 ёсоор $x=0$ эсвэл $x=\frac{5}{3}$ гэж гарна.
б. $-5x+2x^2=3$ тэгшитгэлийг $2x^2-5x-3=0$ хэлбэрт бичиж, үржигдэхүүн болгон задалбал $(2x+1)(x-3)=0$, чанар 1 ёсоор $2x+1=0$ эсвэл $x-3=0$ болно.
Эндээс $x=-\frac{1}{2}$ эсвэл $x=3$ гэж гарна.
в. $4x^2=12x-9$ тэгшитгэлийг $4x^2-12x+9=0$ хэлбэрт бичиж, үржигдэхүүн болгон задалбал $(2x-3)(2x-3)=0$ болох ба чанар 1 ёсоор $2x-3=0$ болно. Иймд уг квадрат тэгшитгэл $x=1.5$ гэсэн давхардсан хоёр шийдтэй байна.

Чанар 2. Хэрэв $X^2=k,\ k>0$ бол $X=\sqrt{k}$ эсвэл $X=-\sqrt{k}$ болно. Үүнийг товчлон $X_{1,2}=\pm\sqrt{k}$ гэж бичдэг.

Баталгаа: $X^2=k$ тэгшитгэлийг $X^2-k=0$ хэлбэрт бичье. Энд $k>0$ учраас $X^2-\left(\sqrt{k}\right)^2=0$ гэж бичиж болно. Квадратуудын ялгаврын томьёо ёсоор $\left(X-\sqrt{k}\right)\left(X+\sqrt{k}\right)=0$, 1-р чанар ёсоор $X=\sqrt{k}$ эсвэл $X=-\sqrt{k}$ болно. Шийдийн олонлог нь $\{-\sqrt{k},\sqrt{k}\}$ болно.

Жишээ 3. Дараах квадрат тэгшитгэлийг бод.
а. $-4x^2+3=-6$ б. $x^2+12=0$ в. $(x+5)^2=24$

Бодолт. а. $-4x^2+3=-6$ тэнцэтгэлийн тэнцүүгийн тэмдгийн хоёр талд (–3)-ыг нэмээд, (–4)-д хуваавал $x^2=\frac{9}{4}$ эндээс $x=\sqrt{\frac{9}{4}}$ эсвэл $x=-\sqrt{\frac{9}{4}}$ болно. Чанар 2 ёсоор шийдийн олонлог нь $\{-1.5,1.5\}$ болно.

б. $x^2+12=0$ тэнцэтгэлийн тэнцүүгийн тэмдгийн хоёр талд (–12)-ыг нэмбэл $x^2=-12$ болно. Ямар ч бодит тооны квадрат сөрөг тоо гарахгүй учир энэ тэгшитгэл бодит шийдгүй.

в. Чанар 2 ёсоор $x+5=\sqrt{24}$ эсвэл $x+5=-\sqrt{24}$ болно. Эндээс шийд нь $x=2\sqrt{6}-5$ эсвэл $x=-2\sqrt{6}-5$ болно. Шийдийн олонлог нь $\{-2\sqrt{6}-5,\ 2\sqrt{6}-5\}$ болно.

Дүгнэлт: Хэрэв $k<0$ бол $X^2=k$ тэгшитгэл бодит шийдгүй.

Хэрэв $k=0$ бол $X^2=k$ тэгшитгэл давхардсан хоёр шийдтэй.

Жишээ 4. $x^2+6=6x$ квадрат тэгшитгэлийг бүтэн квадрат ялгах аргаар бод.

Бодолт. $x^2+6=6x$ тэгшитгэлийн $x^2-6x+6=0$ хэлбэрт бичье. Үүнийг $x^2-2\cdot3\cdot x+3^2-3^2+6=0$ гэж бичиж, $(x-3)^2-3=0$ болгоё. Эндээс $(x-3)^2=3$ гэсэн хэлбэрт бичиж 2-р чанарыг ашиглавал шийд нь $x-3=\sqrt{3}$ эсвэл $x-3=-\sqrt{3}$ болно. Шийдийн олонлог нь $\{-\sqrt{6}-5,\ 2\sqrt{6}-5\}$ болно.

Ерөнхий тохиолдолд квадрат тэгшитгэлийн шийдийг олох томьёоны гаргалгааг хийе. $ax^2+bx+c=0$ гэсэн квадрат тэгшитгэлийн шийдийг олъё. Эхлээд тэгшитгэлийн хоёр талыг a-д хуваавал $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ болно. Үүнийг $x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$ хэлбэрт бичиж, нийлбэрийн квадратын томьёог ашиглавал $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$ болох ба $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$ болно. Энд 1 дүгээр чанарыг ашиглахын тулд $b^2-4ac\geq0$ гээд товчлоод D үсгээр тэмдэглэе ($b^2-4ac<0$ бол тэгшитгэл шийдгүй). Тэгвэл $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{D}{4a^2}}\right)^2=0$ хэлбэрт бичиж болох ба $\left(x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{D}{4a^2}}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{D}{4a^2}}\right)=0$ буюу $\left(x+\frac{b-\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x+\frac{b+\sqrt{D}}{2a}\right)=0$ болно. Иймд уг тэгшитгэлийн шийд нь $x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ эсвэл $x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ болно. Үүнийг товчлон $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ гэж бичдэг.

Хэрэв $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq0$ ба $b^2-4ac\geq0$ бол $ax^2+bx+c=0$ квадрат тэгшитгэлийн шийдүүд нь $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ эсвэл $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ байна. Үүнийг товчоор $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ гэж бичдэг бөгөөд энэ нь квадрат тэгшитгэлийн шийд олох томьёо гэдэг.

Тодорхойлолт. $ax^2+bx+c=0$ квадрат тэгшитгэлийн хувьд b^2-4ac тоог уг квадрат тэгшитгэлийн **дискриминант** гэх ба $D=b^2-4ac$ гэж тэмдэглэдэг.

Дүгнэлт. $a,b,c\in\mathbb{R}$ ба $a\neq0$ үед $ax^2+bx+c=0$ тэгшитгэл нь:

Хэрэв $b^2 - 4ac = 0$ бол давхардсан хоёр $(x_1 = x_2)$ шийдтэй байна.
Хэрэв $b^2 - 4ac > 0$ бол ялгаатай хоёр $(x_1 \neq x_2)$ шийдтэй байна.
Хэрэв $b^2 - 4ac < 0$ бол бодит шийдгүй ($\varnothing$) байна.

Жишээ 5. Дараах тэгшитгэлийг томьёо ашиглан бод.

а. $2x^2 + 5x + 2 = 0$ б. $x^2 - 4x + 7 = 0$ в. $4x^2 - 20x + 25 = 0$

Бодолт. а. Хэрэв өгсөн тэгшитгэлийн дискриминант олбол $D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$ ба $9 > 0$ тул уг квадрат тэгшитгэл ялгаатай хоёр шийдтэй. Иймээс шийдүүдийг олъё. Квадрат тэгшитгэлийн шийдийг олох томьёог ашиглавал $x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{9}}{4}$ болно. Уг квадрат тэгшитгэлийн шийдийн олонлог нь $\{-2, -0.5\}$ болно.

б. Хэрэв өгсөн тэгшитгэлийн дискриминант олбол $D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = -12$ ба $-12 < 0$ тул уг квадрат тэгшитгэл шийдгүй.

в. Хэрэв өгсөн тэгшитгэлийн дискриминант олбол $D = (-20)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 25 = 0$ тул уг квадрат тэгшитгэл давхардсан хоёр шийдтэй. Иймээс шийдийг олъё. Квадрат тэгшитгэлийн шийдийг олох томьёо ашиглавал $x = \dfrac{-(-20) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 4}$ болно. Уг квадрат тэгшитгэл $x = 2.5$ гэсэн давхардсан хоёр шийдтэй.

7. Гүйцэд биш квадрат тэгшитгэл бод

а. $3x^2 - 4x = 0$ б. $6b^2 - b = 0$ в. $-0.1x^2 + 10 = 0$
г. $-5x^2 + 6x = 0$ д. $2y + y^2 = 0$ е. $7a - 14a^2 = 0$
ё. $10x^2 + 7x = 0$ ж. $4x^2 - 9 = 0$ з. $3x^2 - 2 = 0$
и. $4a^2 - 3a = 0$ й. $-x^2 + 3 = 0$ к. $5u^2 - 4u = 0$

8. Тэгшитгэлийг нэгдүгээр чанараар бод.

а. $x^2 + 9x - 22 = 0$ б. $x^2 - 8x - 84 = 0$ в. $x^2 - 34x + 289 = 0$
г. $x^2 - 12x + 32 = 0$ д. $x^2 + 14x + 33 = 0$ е. $y^2 + y - 2 = 0$

9. Тэгшитгэлийг квадрат тэгшитгэлийн шийд олох томьёог ашиглан бод.

а. $2x^2 - 5x - 3 = 0$ б. $3b^2 - 3b + 1 = 0$ в. $2x^2 + 15x = 0$
г. $3x^2 - 8x + 5 = 0$ д. $7y^2 - 11y - 6 = 0$ е. $a^2 - 2.25 = 0$
ё. $5x^2 + 9x + 4 = 0$ ж. $16x^2 + 8x + 1 = 0$ з. $25x^2 - 144 = 0$
и. $36a^2 - 12a + 1 = 0$ й. $5x^2 + 26x - 24 = 0$ к. $u^2 - 5u = 0$

10. Тэгшитгэлийг бодолгүйгээр шийдийн тоог тодорхойл.

а. $3x^2 - 5x + 3 = 0$ б. $36a^2 - 12a + 1 = 0$
в. $4x^2 - 8x + 5 = 0$ г. $b^2 - 3b + 1 = 0$
д. $9x^2 + 9x + 4 = 0$ е. $8y^2 - 11y - 6 = 0$

11. Тэгшитгэлийг $ax^2 + bx + c = 0$ хэлбэрт шилжүүлж бод.

а. $\dfrac{x^2 - 1}{2} - 11x = 11$
б. $\dfrac{x^2 + x}{2} = \dfrac{8x - 7}{3}$
в. $(3x - 1)(x + 2) = 20$
г. $(x - 4)(4x - 3) + 3 = 0$
д. $(2x - 1)(2x + 1) = x(2x + 3)$
е. $(x + 1)(x + 2) = (2x - 1)(x - 2)$
ё. $(3x + 1)^2 = (x + 2)(x - 3)$
ж. $(x + 3)(3x - 2) = (4x + 5)(2x - 3)$

з. $x(x-15)=3(108-5x)$

й. $47-x(3x+4)=2(17-2x)-62$

и. $(x-7)(x+3)+(x-1)(x+5)=102$

к. $(x-3)^2+(x+4)^2-(x-5)^2=17x+24$

6.3. КВАДРАТ ТЭГШИТГЭЛД ШИЛЖДЭГ ТЭГШИТГЭЛ

Биквадрат тэгшитгэл

Тодорхойлолт. $a\neq 0,\ ax^4+bx^2+c=0$ тэгшитгэлийг **биквадрат** тэгшитгэл гэнэ.

Биквадрат тэгшитгэлийг $x^2=y$ гэсэн орлуулгаар $ay^2+by+c=0$ хэлбэрийн квадрат тэгшитгэлд шилжүүлж бодно.

Жишээ 1. $x^4-5x^2+6=0$ тэгшитгэлийг бод.

Бодолт. Хэрэв өгсөн тэгшитгэлд $x^2=y$ орлуулга хийвэл $y^2-5y+6=0$ болно. Квадрат тэгшитгэлийн шийд олох томьёо ашиглан y -ийг олъё.

$$y=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot6}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=2 \text{ буюу } 3.$$

Иймд $x^2=y$ тул $x^2=3$ эсвэл $x^2=2$ болно. Эндээс $x_{1,2}=\pm\sqrt{3},\ x_{3,4}=\pm\sqrt{2}$ болно. Өгсөн тэгшитгэлийн шийдийн олонлог нь $\{-\sqrt{3},-\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{3}\}$ болно.

Жишээ 2. $(x+2)^4+2(x+2)^2-3=0$ тэгшитгэлийг бод.

Бодолт. Хэрэв өгсөн тэгшитгэлд $(x+2)^2=y$ гэсэн орлуулга хийвэл $y^2+2y-3=0$ болно. Квадрат тэгшитгэлийн шийд олох томьёо ашиглан y -ийг олъё.

$$y=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-3)}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} \text{ ба } y=-3 \text{ эсвэл } y=1 \text{ болно.}$$

Иймд $(x+2)^2=y$ тул $(x+2)^2=-3$ эсвэл $(x+2)^2=1$ болно. Эндээс $(x+2)^2=-3$ шийдгүй ба $(x+2)^2=1,\ x+2=1$ эсвэл $x+2=-1$ болно. Иймд өгсөн тэгшитгэлийн шийдийн олонлог нь $\{-1,1\}$ болно.

Жишээ 3. $\frac{x-2}{x+3}-\frac{30}{x^2-9}=\frac{1}{6}$ тэгшитгэлийг бод.

Бодолт. Эхлээд өгсөн тэгшитгэлийг $6(x^2-9)$ гэсэн ерөнхий хуваарьтай болгоё.

$\frac{x-2}{x+3}^{|6(x-3)}-\frac{30}{x^2-9}^{|6|}=\frac{1}{6}^{|(x^2-9)}$ буюу тохируулах үржигдэхүүнээр үржүүлбэл $\frac{6(x-2)(x-3)}{6(x^2-9)}-\frac{180}{6(x^2-9)}=\frac{x^2-9}{6(x^2-9)}$ болно. Үүнийг хялбарчилбал $\frac{5x^2-30x-135}{6(x^2-9)}=0$ болно. Энд бутархайн хуваарь тэгээс ялгаатай байх учир $6(x^2-9)\neq 0$ байх ёстой. Өөрөөр хэлбэл $x\neq\pm3$ байна. Иймд $5x^2-30x-135=0$ буюу $x^2-6x-27=0$ гэсэн квадрат тэгшитгэлийг бодоход хангалттай. Эндээс квадрат тэгшитгэлийн шийд олох

томьёо ашиглавал $x_{1,2}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot(-27)}}{2\cdot1}=\frac{6\pm\sqrt{144}}{2}$ болох тул $x_1=9$ эсвэл $x_2=-3$ болно. Үүнээс $x\neq-3$ учир өгсөн тэгшитгэл $x=9$ гэсэн нэг шийдтэй.

Жишээ 4. Сурагчид шинэ жилийн баярыг тохиолдуулан ангийнхаа сурагч бүрд ил захидал явуулжээ. Тэд хоорондоо 1332 ил захидал солилцсон байв. Анги хэдэн сурагчтай вэ?

Бодолт. Ангийг x сурагчтай гэе. Бодлогын нөхцөл ёсоор сурагч бүр өөрөөсөө бусад $x-1$ сурагчид ил захидал явуулна. Тэгвэл нийт $x(x-1)$ ил захидал явуулсан байна. Иймд $x(x-1)=1332$ квадрат тэгшитгэл гарна. $x^2-x-1332=0$ энэ тэгшитгэлийн шийдийг олъё:

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+5328}}{2}=\frac{1\pm73}{2}$$

гэдгээс $x_1=37$, $x_2=-36$. Сурагчийн тоо нь эерэг тоогоор илэрхийлэгдэх тул анги 37 сурагчтай.

12. Биквадрат тэгшитгэлийг бод.

а. $x^4-5x^2+4=0$ б. $x^4-2x^2=63$ в. $2x^3-x^2-1=0$

г. $2x^4-7x^2=4$ д. $x^4+7x^2=8$ е. $x^4+5x^2+4=0$

ё. $x^4-14x^2+45=0$ ж. $\sqrt[4]{x}+\sqrt[8]{x}-2=0$ з. $x^4-8x^2+16=0$

и. $x^4-10x^2+9=0$ й. $x^4-13x^2+36=0$ к. $x^4+8x^2+16=0$

13. Тэгшитгэлийг бод.

а. $\frac{x-7}{x-5}+\frac{20}{x^2-25}=\frac{6}{x+5}$ д. $\frac{x+2}{x-1}-\frac{5}{x+1}=\frac{6}{x^2-1}$

б. $\frac{8}{x^2-4}+\frac{x-4}{x+2}=\frac{x-4}{2-x}$ е. $\frac{x+3}{2+x}-\frac{x+3}{2-x}=\frac{20}{x^2-4}$

в. $\frac{x+1}{x-2}+\frac{x-2}{x+3}=\frac{15}{(x-2)(x+3)}$ ё. $\frac{6}{(5-x)(x+1)}+\frac{x}{x+1}=\frac{3}{x-5}$

г. $\frac{x+2}{x-4}-\frac{48}{x^2-16}=7$ ж. $\frac{2x}{x+2}-\frac{x-1}{x-3}=\frac{10}{(3-x)(x+2)}$

14. Дараалсан хоёр натурал тооны үржвэр 132 болно. Эдгээр тоог ол.

15. Дараалсан хоёр бүхэл тооны нийлбэрийн квадрат нь тэдгээрийн квадратуудын нийлбэрээс 112-оор их бол тэдгээр тоог ол.

16. Тэгш өнцөгтийн талбай нь 60 м.кв бөгөөд түүний урт нь өргөнөөс 4 м-ээр их болно. Периметрийг ол.

17. Тэгш өнцөгтийн периметр 62 м, талбай нь 210 м.кв болно. Талуудын уртыг тодорхойл.

18. Нэг нь нөгөөгөөсөө 5-аар илүү хоёр тооны үржвэр 24 болно. Эдгээр тоог ол.

19. Тэгш өнцөгт гурвалжны катетуудын нэг нь нөгөөгөөс 4 см-ээр их болно. Хэрэв гипотенуз нь 20 см бол талбайг ол.

20. Сумын төвөөс X ангийн хоёр бүлэг нэг зэрэг баруун ба хойд зүг (хоорондоо перпендикуляр замаар) гарав. Хэрэв нэг цагийн дараа тэдгээрийн хоорондын зай нь 10 км болсон бөгөөд нэг нь нөгөөгөөс нь 2 км/ц илүү хурдан явсан гэвэл тус бүрийн хурдыг ол.

21. Квадрат хэлбэртэй гөлмөн төмрөөс 40 см өргөнтэй тэгш өнцөгт хэлбэртэй хэсгийг зүсэж авахад 3200 см.кв талбайтай тэгш өнцөгт хэсэг үлдэв. Гөлмөн төмрийн талбай ол.

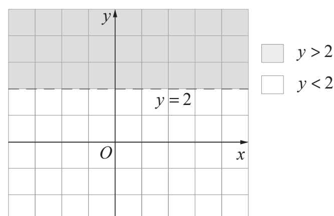
22. Кино театрын нэг эгнээний суудлын тоо нь нийт эгнээний тооноос 6-аар олон болно. Хэрэв кино театр 520 суудалтай бол хэдэн эгнээтэй вэ?

23. Хөл бөмбөгийн тэмцээнд 420 тоглолт болсон бөгөөд баг бүр бусад багтай өөрийн болон бусдын талбайд нэг нэг удаа тогложээ. Тэмцээнд хэчнээн баг оролцсон бэ?

24. Компани өргөн нь уртаасаа 300 м богино тэгш өнцөгт хэлбэртэй тариалангийн талбайн 1 м.кв-ыг 200 төгрөгөөр үнэлэн 8 сая төгрөгөөр түрээсэлжээ. Энэ талбайн урт өргөн нь хэдэн метр байсан бэ?

6.4. ХОЁР ХУВЬСАГЧТАЙ ШУГАМАН ТЭНЦЭТГЭЛ БИШ, ТЭДГЭЭРИЙН СИСТЕМ

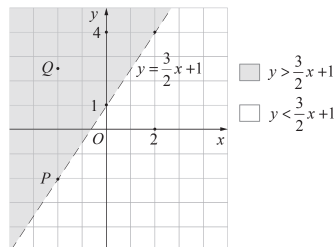
Бид өмнө нь нэг хувьсагчтай тэнцэтгэл бишийн шийд нь тоон шулууны хэсэг байдгийг судалсан. Тэгвэл x, y хоёр хувьсагчтай тэнцэтгэл бишийн шийд болох (x, y) хос тоо бүрийг координатын хавтгайд цэгээр тэмдэглэвэл тэнцэтгэл бишийн шийдийн олонлог нь хавтгайн муж болно.



Шулуун хавтгайг хоёр хагас хавтгайд хуваадаг. Жишээлбэл: Зураг дээр тасархай шугамаар Ox тэнхлэгтэй параллел $y = 2$ тэгшитгэлтэй шулууныг дүрсэлжээ. Шулуунаас дээш орших хагас хавтгайн цэг бүрийн ординат 2-оос их байх тул энэ хагас хавтгай $y > 2$ тэнцэтгэл бишийн шийд болно (зураг дээрх саарал хэсэг). Үүний адилаар шулуунаас доош орших цэгийн олонлог болох будаагүй (зураг дээрх цагаан хэсэг) хагас хавтгай нь $y < 2$ тэнцэтгэл бишийн шийд юм.

Дараах зураг дээр $y = \frac{3}{2}x + 1$ шулууны графикийг тасархай шугамаар дүрсэлжээ. Шулуун дээрх цэг бүрийн (x,y) координат $y = \frac{3}{2}x + 1$ тэгшитгэлийн шийд болно.

Q цэгийн y координат шулуун дээрх P цэгийн y координатаас их, харин x координатууд нь ижил байна. Энэ нь шулуунаас дээш орших хагас хавтгайн Q цэг бүрийн хувьд $y > \frac{3}{2}x + 1$ байна гэсэн үг.



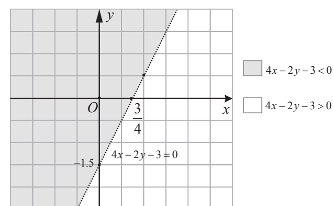
Иймд шулуунаас дээш орших цэгийн олонлог болох хагас хавтгай (саарал өнгөөр будсан хэсэг) $y > \frac{3}{2}x + 1$ тэнцэтгэл бишийн шийд болно. Үүний адилаар шулуунаас доош орших хагас хавтгай $y < \frac{3}{2}x + 1$ тэнцэтгэл бишийн шийд болно.

Ерөнхийдөө, хэрэв шулуун $y = mx + c$ тэгшитгэлээр өгсөн байвал:

- $y > mx + c$ тэнцэтгэл бишийн шийд шулуунаас дээш орших хагас хавтгай болно.
- $y < mx + c$ тэнцэтгэл бишийн шийд шулуунаас доош орших хагас хавтгай болно.

Хэрвээ шулууны тэгшитгэл $ax + by = c$ хэлбэртэй байвал аль нэг хагас хавтгайгаас цэг авч координат нь тэнцэтгэл бишийг хангаж байгаа эсэхийг шалгаж шийдийг олно.

Жишээ 1. $4x - 2y - 3 > 0$ ба $4x - 2y - 3 < 0$ тэнцэтгэл бишийн шийдийг дүрсэл.



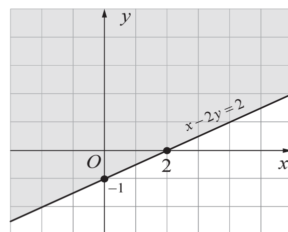
Бодолт. Эдгээр тэнцэтгэл бишүүдийн шийд болох хагас хавтгайнуудыг $4x - 2y - 3 = 0$ шулуун зааглана. Өөрөөр хэлбэл хагас хавтгайнууд энэ шулуунаар хиллэнэ. Энэ шулууны график $(0, -1.5)$ ба $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$ цэгүүдийг дайрна (тэгшитгэлд орлуулж шалгаарай). Графикийг зурагт үзүүлэв. Шулуунаас дээш орших дурын цэг авч координатуудыг тэнцэтгэл бишид орлуулан шалгая. (0,0) цэг шалгахад хамгийн хялбар бөгөөд шулуунаас дээш оршиж байгаа нь зургаас харагдаж байна. Тэнцэтгэл бишүүдэд $x = 0$, $y = 0$ утгуудыг орлуулбал хоёр дахь тэнцэтгэл бишээс $-3 < 0$ гэсэн үнэн тоон тэнцэтгэл биш гарч байна. Тэгэхлээр (0,0) цэгийн байрлах хагас хавтгай $4x - 2y - 3 < 0$ тэнцэтгэл бишийн шийд болно (саарал өнгөтэй хэсэг). Харин $4x - 2y - 3 = 0$ шулуунаас доош орших хагас хавтгай (цагаан өнгөтэй хэсэг) $4x - 2y - 3 > 0$ тэнцэтгэл бишийн шийд болно.

Санамж

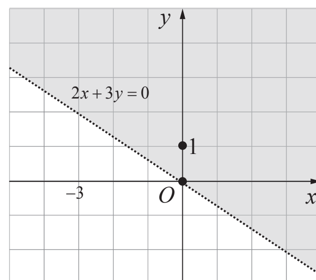
- $<$ буюу $>$ тэмдэгтэй эрс тэнцэтгэл бишийн хувьд хагас хавтгайн хил тэнцэтгэл бишийн шийдэд орохгүй бөгөөд хилийн шугамыг тасархай шугамаар зурдаг.
- $\leq$ буюу $\geq$ тэмдэгтэй тэнцэтгэл бишийн хувьд хагас хавтгайн хил тэнцэтгэл бишийн шийдэд орох ба хилийн шугамыг үргэлжилсэн шугамаар зурдаг.

Тодорхойлолт. Хоёр хувьсагчтай шугаман тэнцэтгэл бишийн шийд болох хагас хавтгайг **боломжит шийдийн муж** гэнэ.

Жишээ 2. $x - 2y \geq 2$ тэнцэтгэл бишийн шийд биш мужийг будаж боломжит шийдийн мужийг дүрсэл.



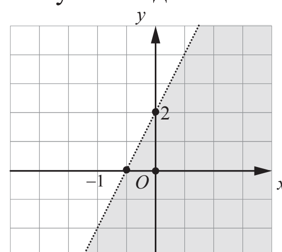
Бодолт. Тэнцэтгэл биш $\geq$ тэмдэгтэй тул мужуудын хил болох $x - 2y = 2$ шулууныг үргэлжилсэн шугамаар зурна. Шулуун Ox тэнхлэгийг (2,0) цэгээр, Oy тэнхлэгийг (0,–1) цэгээр огтолж байна. Эдгээр цэгүүдийг дайрсан шулууныг татна. Координатын эх (0,0) цэг шулуунаас дээш оршиж байна. Энэ үед $0 \geq 2$ гэсэн худал тэнцэтгэл биш үүсэж байгаа тул (0,0) цэгийн оршиж байгаа хагас хавтгай тэнцэтгэл бишийн шийд биш муж болно. Иймд энэ хагас хавтгайг будна. Зураг дээр энэ мужийг саарал өнгөөр будаж харуулав. Тэнцэтгэл бишийн боломжит шийдийн муж нь будагдаагүй (цагаан өнгөтэй) хагас хавтгай юм.



Жишээ 3. $2x + 3y < 0$ тэнцэтгэл бишийн шийд биш мужийг буд.

Бодолт. Тэнцэтгэл бишийн тэмдэг тэгээс эрс бага байгаа тул боломжит шийдийн мужийн хил болох $2x + 3y = 0$ шулууныг тасархай шугамаар дүрсэлнэ. Координатын эх хил дээр оршиж байгаа тул мужийн хил дээр үл орших, тухайлбал (0,1) цэг аль мужид оршиж байгааг шалгаж, боломжит шийдийн мужийг олно. Энэ цэгийн координатыг тэнцэтгэл бишид орлуулбал $2\cdot 0+3\cdot 1<0$ буюу $3 < 0$ гэсэн худал тэнцэтгэл биш үүсэж байна. Иймд (0,1) цэг шийд биш мужид оршино. Зураг дээр энэ мужийг саарал өнгөөр будаж дүрсэлжээ.

Жишээ 4. Зураг дээрх а. будагдаагүй (цагаан) муж б. будсан муж шийд нь болох тэнцэтгэл бишүүд зохио.



Бодолт. Мужуудын хил болох шулууны налалт $\frac{2}{1} = 2$-той тэнцүү ба (0,2) цэгийг энэ шулуун дайрах тул тэгшитгэл нь $y - 2 = 2(x - 0)$ буюу $y - 2x = 2$ гэж гарна (Эсвэл, налалт нь 2-той тэнцүү ба Oy тэнхлэгийг (0,2) цэгээр огтлох тул шулуун $y = 2x + 2$ тэгшитгэлтэй гэж олж болно).

Координатын эх (0,0) цэг хил дээрх (0,2) цэгээс доош орших ба будсан мужид оршиж байна. Тэгшитгэлд $x = 0$ ба $y = 0$ утгуудыг орлуулбал $0-2\cdot 0=0<2$ байна.

Иймд будсан муж $y-2x<2$ тэнцэтгэл бишийн шийд, будагдаагүй муж $y-2x>2$ тэнцэтгэл бишийн шийд тус тус болно. Хил нь тасархай зураас байгаа тул хил дээрх цэгүүд тэнцэтгэл бишийн шийдэд орохгүй, тэнцэтгэл бишийн тэмдэг эрс байна.

25. Тохирох үгийн доогуур зурж, зөв өгүүлбэр үүсгэ.

А. $y<mx+c$ тэнцэтгэл бишийн шийд нь $y=mx+c$ функцийн графикаас дээш/доош орших хагас хавтгай байна.

Б. $y>mx+c$ тэнцэтгэл бишийн шийд нь $y=mx+c$ функцийн графикаас дээш/доош орших хагас хавтгай байна.

26. Тэнцэтгэл бишийн шийд биш мужийг буд.

а. $x>-3$ б. $x-y<2$ в. $x+y<2$ г. $x+3y<6$

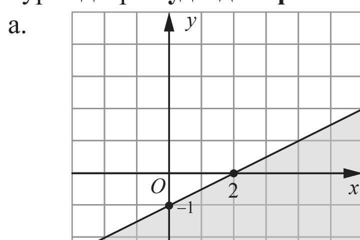
27. Тэнцэтгэл бишийн боломжит шийдийн мужийг буд.

а. $y>2-2x$ б. $2x+3y>6$ в. $y\geq 0$ г. $x\geq 0$

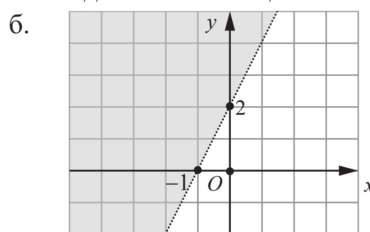
д. $x-3y\geq 7$ е. $-2\leq x\leq 3$ ё. $0\leq y<2$ ж. $x\leq y$

28. Зураг дээрх **будагдаагүй** хагас хавтгай шийд нь болох тэнцэтгэл биш бич.

а.



б.

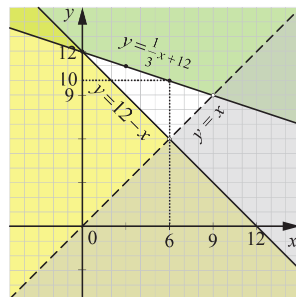


Жишээ 5. Ариунаа дэлгүүрээс 100 грамм нь 500 төгрөгийн үнэтэй самар, 100 грамм нь 1500 төгрөгийн үнэтэй чихэр авчээ. Тэр нийтдээ 1200 граммаас багагүй самар, чихрийг 18000 төгрөгт багтааж авсан байна. Хэрэв авсан чихэр нь самраас их байсан бол

а. Эдгээр нөхцөлүүдийг харуулсан тэнцэтгэл бишүүд бич.

б. Тэнцэтгэл биш тус бүрийн шийд биш мужийг будаж, нэг координатын хавтгайд тэнцэтгэл бишүүдийг дүрсэл. Будагдаагүй үлдсэн муж нь тэнцэтгэл бишийн системийн шийд болно.

в. Графикаас харж, чихэр ба самар нийлээд хамгийн ихдээ хэдэн бүхэл зуун грамм авч болохыг болон тэр үеийн нийт үнийг олоорой.



Бодолт. а. x зуун грамм самар, y зуун грамм чихэр авсан гэвэл дээрх нөхцөлүүдийг тэнцэтгэл бишээр $100x+100y\geq 1200,\ 500x+1500y\leq 18000,\ x<y$ гэж илэрхийлнэ. Эхний ба хоёр дахь тэнцэтгэл бишийн хоёр талыг харгалзан 100 ба 500-д хуваавал $x+y\geq 12$ ба $x+3y\leq 36$ болно.

б. Эдгээр тэнцэтгэл бишүүдийн шийдүүдийн огтлолцол

буюу $\begin{cases} x+y\geq 12 \\ x+3y\leq 36 \\ x<y \end{cases}$ системийн шийдийг дүрсэлье.

Мужуудын хилийн шугам болох $y=12-x,\ y=-\frac{1}{3}x+12,\ y=x$ шулуунуудын графикийг эхлээд зурна. Энд $y=x$ шулууныг тасархай шугамаар, нөгөө хоёр шулууныг үргэлжилсэн шугамаар дүрсэлнэ. Үүний дараа $y\geq 12-x,\ y\leq -\frac{1}{3}x+12,$ $x<y$ тэнцэтгэл бишүүдийн шийд биш мужийг будвал будагдаагүй (цагаан) гурвалжин муж тэнцэтгэл бишийн системийн шийд болно.

в. 18000 төгрөгөө бүгдийг нь зарцуулбал их чихэр, самар авах нь ойлгомжтой. Иймд гурвалжны $y=-\frac{1}{3}x+12$ тэгшитгэлтэй тал дээрх бүхэл координаттай $(0,12),(3,11),(6,10)$ цэгүүдээс сонгоё. Эдгээрээс $x=6, y=10$ үед нийт 1600 грамм чихэр самар авч байгаа нь хамгийн их нь болохыг шалгаарай. Өөрөөр хэлбэл тэнцэтгэл бишийн системийг графикаар бодохдоо шийд биш мужуудыг будвал шийд нь цагаан (будагдаагүй) үлдэж, шийдийг тогтооход хялбар болж байна.

29. Тэнцэтгэл бишүүдээр тодорхойлогдох мужийг дүрсэлж харуул.

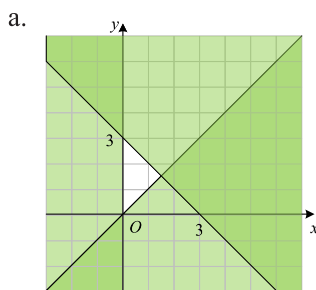
а. $2y+x\geq 4,\ \ y\leq x,\ x\leq 4$ б. $x+y>-1,\ \ y<3,\ \ y>0,\ x<2$

30. а. Координатын хавтгайд $x=3,\ \ y=4$ ба $x+y=4$ шулуунууд зур.

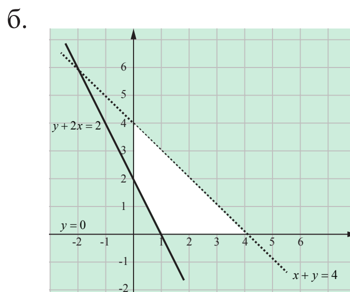
б. Шийд биш мужийг будаж $\begin{cases} x\leq 3 \\ y\leq 4 \\ x+y\geq 4 \end{cases}$ тэнцэтгэл бишийн системийн шийд болох мужийг дүрсэл.

31. Зураг дээрх будагдаагүй муж шийд нь болох тэнцэтгэл бишийн систем зохио.

а.



б.



32. $\begin{cases} y \le 3 \\ y \ge x+1 \\ 3x + y \ge 3 \end{cases}$ тэнцэтгэл бишийн системийн шийд болох мужийг дүрсэл.

Системийн шийд болох бүхэл координаттай цэгүүдийг тоочин бичээрэй.

33. Аялалд 60 хүн 4500 кг ачаатай явах болов. Тэд том жижиг хоёр төрлийн машинаар явцгаасан байна. Жижиг машинд 5 хүн багтах ба 600 кг ачаа ачиж болно. Том машинд 8 хүн багтах ба 300 кг ачаа ачиж болно. Зөвхөн 8 том, 7 жижиг машин байсан ба x том машин, y жижиг машин ашигласан гэж үзвэл,

а. $8x + 5y \ge 60$ байх ёстой гэдгийг нотол.

б. $x \ge 0$ ба $y \ge 0$ байх ёстой нь тодорхой. Үүнээс гадна x ба y-ийн хувьд биелэх гурван тэнцэтгэл биш бичээрэй.

в. Эдгээр тэнцэтгэл бишүүдийг координатын хавтгайд, шийд биш мужийг нь будаж дүрсэл.

г. Машины тооны байж болох боломжуудыг зураг дээр цэгээр тэмдэглэн дүрсэл.

д. Хамгийн цөөндөө хэдэн машин ашиглаж болж байна вэ? Энэ боломжид хүрэх арга замуудыг тоочин бич.

34. Сургуулийн найрал дууны дугуйланд x хүү ба y охин суралцдаг.

а. Хэрэв энэ дугуйлангийн охидын тоо хүүгийн тоог 1.5 дахин авснаас олон бол $y < \frac{2}{3}x$ гэж харуул.

б. 12-оос олон охин, 5-аас олон хүү байгаа ба дугуйланд хамгийн ихдээ 35 сурагч байх ёстой бол эдгээрийг илэрхийлэх тэнцэтгэл бишүүд бич.

в. Координатын тэнхлэгүүдийг $0 \le x \le 40$, $0 \le y \le 40$ завсарт зурж, тэнцэтгэл бишүүдийг графикаар дүрсэл. Шийд биш мужийг буд.

в. Сургууль найрал дууны сурагчдадаа хувцас авчээ. Эмэгтэй сурагчийн хувцас 25 мянган төгрөг, эрэгтэй сурагчийнх 20 мянган төгрөгийн үнэтэй. Хувцасны боломжит нийт үнэ хамгийн ихдээ хэдэн төгрөг болох вэ? Энэ утгадаа хүрэх цэгийг тэмдэглэж утгыг тайлбарла.

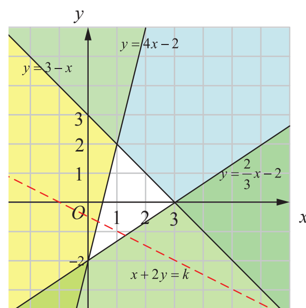
Шугаман программчлалын бодлого

Бизнес ба үйлдвэрлэлд ажилчдын тоо, машин техникийн хүрэлцээ, материал, хөрөнгө санхүүгийн нөөц гэх мэт хязгаарлагдмал боломж нөхцөлд, бага зардлаар их ашиг олох, хамгийн их бүтээмж бий болгох асуудал байнга тулгардаг.

Энэ асуудалд **шугаман программчлал** хэмээх математикийн салбар шинжлэх ухаан хариулт өгдөг. Тухайн хязгаарлалт, нөхцөлүүдийг математик хэлээр илэрхийлбэл ихэвчлэн тэнцэтгэл биш хэлбэртэй байна. Тэнцэтгэл бишүүд нь шугаман байх үед ($x+2y>12$ гэх мэт) дэвшигдэх бодлогыг шугаман программчлалын бодлого гэнэ. Тухайлбал: $x + 2y$ илэрхийлэлд хамгийн их ба хамгийн бага утга байхгүй. Харин x ба y-ийн утгууд заагтай байвал илэрхийлэл хамгийн их эсвэл хамгийн бага утгатай байдаг.

Жишээ 6. x, y тоо $x+y\le 3$, $y\le 4x-2$ ба $y\ge x-3$ тэнцэтгэл бишүүдийг хангана. $x+2y$ илэрхийллийн боломжит хамгийн их ба хамгийн бага утгыг ол.

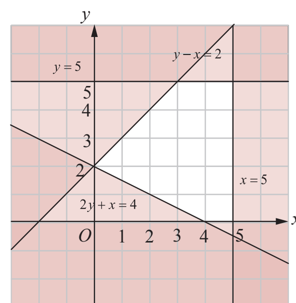
Бодолт. $x+2y$ илэрхийллийн утгыг $\begin{cases} x+y\le 3 \\ y\le 4x-2 \\ y\ge x\quad 3 \end{cases}$ шугаман тэнцэтгэл бишийн системийн боломжит шийдийн муж



дахь цэгүүдийн хувьд л авч үзье. Хэрвээ $x+2y=k$ гэвэл $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}k$ болох ба энэ нь $-\frac{1}{2}$ налалттай шулуун байна. Зураг дээр $k=-1$ байх тохиолдлыг тасархай зураасаар дүрсэлжээ.

Энэ шулууныг параллелээр дээш нь зөөж шийд болох мужийн хилийн шугам дээр орших (1, 2) цэгийг дайрах үед $x+2y$ илэрхийллийн утга хамгийн их болно. Энэ утгыг тооцоолбол $x+2y=1+2\cdot 2=5$ гэж гарна.

Үүний адилаар энэ шулууныг доош нь параллелээр зөөж шийд болох мужийн хилийн шугам дээрх (0, –2) цэгийг дайрах үед $x+2y$ илэрхийллийн хамгийн бага утга гарна. Энэ нь $x+2y=0+2\cdot(-2)=-4$ байна.



35. Зураг дээрх будагдаагүй муж $x\le 5$, $0\le y\le 5$, $y-x\le 2$, $2y+x\ge 4$ тэнцэтгэл бишүүдийн системийг илэрхийлнэ. $x-2y$ илэрхийллийн хамгийн их ба хамгийн бага утгыг энэ мужийн цэгүүдийн хувьд ол.

36. а. $y-x\ge 0$, $y\le x+4$ ба $0\le x\le 4$ тэнцэтгэл бишүүдэд бүгдэд нь тохирох мужийг дүрслэхийн тулд тэнцэтгэл биш бүрийн **шийд биш** мужийг будаарай.

б. x ба y нь дээрх тэнцэтгэл бишүүдийг хангаж байх тохиолдолд $2x+3y$ илэрхийллийн хамгийн их утгыг ол.

37. Болд Туяа хоёр чулуу таалцаж тоглов. Тэдний атгасан чулууны тооны зөрөө 3-аас ихгүй байсан ба Болд 3 дахин олон чулуу атгасан ч, тэдний атгасан чулууны нийлбэр 6-аас хэтрэхгүй байв. Тэдний атгасан чулуу нийлээд хамгийн их ба хамгийн багадаа хэд байсан бэ?

38. а. $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \le 24 \\ x_1 + 2x_2 \le 6 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$ тэнцэтгэл бишийн системийн боломжит **шийдийн мужийг** дүрсэл.

б. Энэ муж дахь (x_1, x_2) бүхэл координаттай цэгүүдийн хувьд $x_1 + x_2$ илэрхийллийн хамгийн их ба хамгийн бага утгыг ол.

6.5. ИЛТГЭГЧ ТЭГШИТГЭЛ

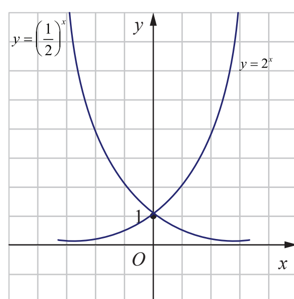
Өмнөх бүлэгт бид $y = a^x$ хэлбэрийн томьёогоор өгөгдөх илтгэгч функц болон түүний графиктай танилцсан. Энэ функцийн график ба чанаруудыг эргэн санаяа.

Жишээ 1. Дараах хүснэгтийг нөхөж, $y = 2^x$ ба $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ функцийн графикийг байгуул. Графикаас харж функцүүдийн чанарыг тодорхойл.

Бодолт. $y = 2^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ функцүүдийн утгыг хүснэгтийг нэг дор байгуулъя.

x	…	–3	–2	–1	0	1	2	3	…
2^x		$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$		8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	

Утгын хүснэгтээс харж графикуудыг байгуулбал дараах зураг гарна. Ерөнхий тохиолдолд илтгэгч функц нь дараах чанаруудтай байна.



$a > 1$ үед
1. Тодорхойлогдох муж $D =]-\infty, \infty[$
2. Утгын муж $E =]0, \infty[$
3. Өсөх функц

$0 < a < 1$ үед
1. Тодорхойлогдох муж $D =]-\infty, \infty[$
2. Утгын муж $E =]0, \infty[$
3. Буурах функц

Тодорхойлолт. a^x илэрхийлэл агуулсан тэгшитгэлийг **илтгэгч** тэгшитгэл гэдэг.

Илтгэгч тэгшитгэлийг үндсэн гурван аргаар бодож болно.

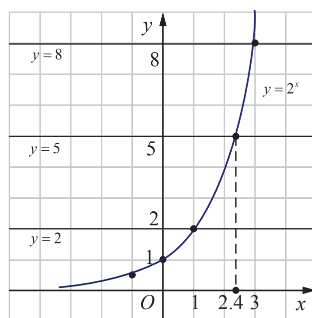
Графикийн арга

Илтгэгч функцийн график тулгуурлан $a^x = f(x)$ хэлбэрийн илтгэгч тэгшитгэлийн шийдийг олох буюу шийдийн тоог тогтоож болдог. Үүний тулд $y = a^x$ ба $y = f(x)$

функцүүдийн графикийг нэг координатын системд байгуулж, огтлолцлын цэгийн абсцессыг олдог. Тэгшитгэлийн шийд графикаас зөвхөн тойм байдлаар олдох тул шийдийг тэгшитгэлд орлуулж шалгаж байх хэрэгтэй.

Жишээ 1. $y = 2^x$ ба $y = 2,\ y = 8,\ y = 5$ функцүүдийн графикийг нэг координатын системд байгуулж $2^x = 2,\ 2^x = 8,\ 2^x = 5$ тэгшитгэлийн шийдийг аравны орноор тоймлон ол.

Бодолт. $y = 2^x$ функц өсөх тул график нь $y = 2,\ y = 8,\ y = 5$ тогтмол функцүүдийн график тус бүртэй зөвхөн ганц цэгээр огтлолцоно. Иймд тэгшитгэлүүд зөвхөн ганц шийдтэй. Графикаас харвал $2^x = 2$ тэгшитгэлийн шийд $x = 1$ харин $2^x = 8$ тэгшитгэлийн шийд $x = 3$ байна.



Шийдүүдээ харгалзах тэгшитгэлд орлуулан шалгавал $2^1 = 2$ ба $2^3 = 8$ гэсэн үнэн тоон тэнцэтгэл үүсэж байгаа тул шийд болно.

$2^x = 5$ тэгшитгэлийн шийдийг зөвхөн тоймлон олж болохоор байна. Аравны орноор тоймлож бичвэл $x \approx 2.4$ эсвэл $x \approx 2.3$ байна. Аль шийд нь нарийвчлал сайтай байгааг тооны машин ашиглан шалгавал $x = 2.3$ нь илүү ойр (0.08-ын зөрөөтэй) байгаа нь харагдаж байна. Үнэндээ $2^{2.3} \approx 4.92$ ба $2^{2.4} \approx 5.28$ болно. Иймд $x = 2.3$ шийд болно. Графикийг илүү нарийвчлалтай, нэгжийг 0.1-ийн алхамтай сонгож байгуулбал шийдийг 0.1-ийн нарийвчлалтай олоход хялбар болно.

39. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ба $y = 2,\ y = 8,\ y = 5$ функцүүдийн графикийг нэг координатын системд байгуулж $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2, \left(\frac{1}{2}\right)^x = 8, \left(\frac{1}{2}\right)^x = 5$ тэгшитгэлүүдийн шийдийг 0.1-ийн нарийвчлалтайгаар ол.

40. $2^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ тэгшитгэлийг графикийн аргаар бодоод хариугаа шалга.

41. Илтгэгч функцийн графикийг бүдүүвчлэн дүрсэлж *f(x)* = 2 тэгшитгэлийн шийдийг 0.1-ийн нарийвчлалтай ол.

а. $f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x$ б. $f(x) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^x$ в. $f(x) = 0.3^x$ г. $f(x) = 3^x$

42. Тэгшитгэлийг графикийн аргаар бод.

а. $3^x = 4 - x$ б. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x + 3$ в. $5^x = 6 - x$ г. $\left(\frac{1}{7}\right)^x = x + 8$

43. Тэгшитгэлийн шийдийн тоог функцийн чанар ба график ашиглан ол

а. $2^x = -\frac{1}{2}x$ б. $\left(\frac{1}{3}\right)^x = -x^2$ в. $3^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$ г. $\sqrt{3}^x = -1$

$a^{f(x)} = a^{g(x)}$ тэгшитгэлээс $f(x) = g(x)$ тэгшитгэлд шилжих арга

Чанар. Хэрэв $a > 0$ ба $a \neq 1$ бол $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ тэгшитгэл $f(x) = g(x)$ тэгшитгэлтэй тэнцүү чанартай (шийдийн олонлог нь ижил байх тэгшитгэлүүдийг тэнцүү чанартай гэнэ).

Жишээ 2. $3^{x^2+2x} = 3^{x+6}$ тэгшитгэлийг бодъё.
Бодолт. Энэ тэгшитгэл нь $x^2 + 2x = x + 6$ тэгшитгэлтэй тэнцүү чанартай. Сүүлчийн тэгшитгэл $x^2 + x - 6 = 0$ квадрат тэгшитгэлд шилжих ба түүний $x_1 = 2,\ x_2 = -3$ шийдүүд анхны тэгшитгэлийн шийд болно.
Жишээ 3. $8^{3x-5} = 16^{x+4}$ тэгшитгэлийг бод.
Бодолт. Тэгшитгэлийн тэнцүүгийн тэмдгийн хоёр талыг зэргийн чанар ашиглан хувиргавал $(2^3)^{3x-5} = (2^4)^{x+4}$ буюу $2^{9x-15} = 2^{4x+16}$ болно. Энэ нь $9x - 15 = 4x + 16$ тэгшитгэлтэй тэнцүү чанартай. Эндээс $5x = 30$ буюу $x = 6$ гэж гарна. Иймд анхны тэгшитгэлийн шийд $x = 6$.

Жишээ 4. $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-5} \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^{x^2-5} = \frac{81}{256}$ тэгшитгэлийг бод.
Бодолт. Тэгшитгэлийн тэнцүүгийн тэмдгийн хоёр талыг хувиргавал $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{8}\right)^{x^2-5} = \left(\frac{3}{4}\right)^4$ буюу $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-5} = \left(\frac{3}{4}\right)^4$ болно. Эндээс $x^2 - 5 = 4$ буюу $x^2 = 9$ гэж гарна. Иймд $x = \pm 3$.

44. Тэгшитгэл бод

а. $2^{x+7} = 2^{3-x}$ б. $\left(\frac{1}{3}\right)^{5x+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+10}$ в. $16^{x+3} = 8^{x+5}$

г. $2^{x^2} \cdot 5^{x^2} = 0.001 \cdot \left(10^{3-x}\right)^2$ д. $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{9}{16}$ е. $\left(\frac{1}{8}\right)^{x^2-2} = \frac{1}{16}$

45. Тэгшитгэл бод

а. $4^{x+1} - 4^{x^2-1} = 0$ б. $(0.6)^x \cdot \left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{27}{125}\right)^3$ в. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+3x+5} = \frac{1}{8}$

46. Тэгшитгэлийн шийдүүдийн нийлбэрийг ол.

а. $7^{4x-2} = 49^x$ б. $2^{x^2-7x+6} = 1$ в. $\frac{27^{2x+4}}{4^{3x+6}} = \left(\frac{2}{3}\right)^6$ г. $\frac{6^{x+2}}{4^{1-x}} = \frac{24^x}{3^{2x-1}}$

47. Тэгшитгэлийг бод.

а. $4^{2-x} \cdot 16^{x+2} = \left(\frac{1}{8}\right)^{2x-2}$ б. $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{2x^2-5x-3} = 1.8$ в. $32 \cdot 0.5^{2x-1} = \left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}$

Шинэ хувьсагч оруулах арга (Орлуулах арга)

Зарим илтгэгч тэгшитгэлийг шинэ хувьсагч оруулан хялбар тэгшитгэлд шилжүүлж бодож болдог. Энэ аргыг орлуулах арга гэж бас нэрлэдэг.

Жишээ 5. $9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 = 0$ тэгшитгэлийг бодъё.
Бодолт. Өгсөн тэгшитгэлийг $(3^2)^x - 4 \cdot 3^x \cdot 3^1 + 27 = 0$ гэж бичье. Улмаар $(a^n)^m = (a^m)^n = a^{n \cdot m}$ байх тул тэгшитгэлийг $(3^x)^2 - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$ гэж бичиж болно. Энд

$3^x = y$ гэж орлуулбал тэгшитгэл $y^2 - 12y + 27 = 0$ квадрат тэгшитгэлд шилжиж байна. Эндээс $y_1 = 3,\ y_2 = 9$ гэж гарна. Эдгээр утгыг $3^x = y$ тэнцэтгэлд буцааж орлуулбал $3^x = 3$ буюу $3^x = 9$ гэсэн хялбар илтгэгч тэгшитгэлүүд гарна. Эдгээрээс $x = 1, x = 2$ гэсэн шийдүүд гарна. Иймд анхны тэгшитгэлийн шийдийн олонлог $x = \{1; 2\}$ болно.

48. Тэгшитгэлийг орлуулах аргаар бод.

а. $\left(\frac{1}{6}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{x} - 6 = 0$ б. $0.01^x + 9.9 \cdot 0.1^x - 1 = 0$

в. $4 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^{x} + 15 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{x} - 4 = 0$ г. $2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x - 88 = 0$

49. Тэгшитгэлийг бод.

а. $3^x + 3^{x+2} = 10$ б. $2^{x+2} - 2^{1-x} = 2$ в. $9^{3x} - 10 \cdot 3^{3x} + 9 = 0$

г. $2^{2x+1} - 2^{x+2} + 2 = 0$ д. $2^x + 2^{1-x} = 3$ е. $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

50. Тэгшитгэлийг бод

а. $3 \cdot 2^{2x} + 6^x - 2 \cdot 3^{2x} = 0$ б. $5 \cdot 3^{2x} + 7 \cdot 15^x - 6 \cdot 25^x = 0$

БҮЛГИЙН НЭМЭЛТ ДААЛГАВАР

1. Тэнцэтгэл бишийг бод.

а. $10x - 1 > 15 - 6x$ б. $\frac{3x}{2} + 5 \geq \frac{5x}{2} - 1$ в. $2a - (8a + 1) - (a + 2) \cdot 5 < 9$

г. $x - \frac{2}{3} \leq \frac{5x}{7} + \frac{1}{2}$ д. $\frac{4x}{9} - \frac{4}{15} > \frac{2x - 1}{3}$ е. $\frac{5}{2} - \frac{3x - 1}{0.2} < \frac{x - 0.1}{0.3}$

2. Тэнцэтгэл бишийн системийг бод.

а. $\begin{cases} 5(x-2) - x > 0 \\ 1 - 3(x-1) < -2 \end{cases}$ б. $\begin{cases} 2x - (x-4) < 6 \\ x > 3(2x-1) + 18 \end{cases}$ в. $\begin{cases} 25x + 2 > 20x + 15 \\ 8x + 3 < 6x + 63 \end{cases}$

3. Тэгшитгэлийг бод.

а. $5x^2 - 2x - 7 = 0$ б. $5x^2 - 5x + 7 = 0$ в. $8x(1 + 2x) = -1$

г. $6x^2 - 4x - 3 = 0$ д. $7x^2 - 2x + 48 = 0$ е. $6x(2x + 1) = 5x + 1$

4. Тэгшитгэлийг квадрат тэгшитгэлд шилжүүлж бод.

а. $\frac{3x - 7}{x + 5} = \frac{x - 3}{x + 2}$ б. $\frac{5 + 2x}{4x - 3} = \frac{3x + 3}{7 - x}$ в. $\frac{2x - 5}{x - 1} = \frac{5x - 3}{3x + 5}$

г. $\frac{5 - x}{2x - 1} = \frac{15 - 4x}{3x + 1}$ д. $\frac{x}{x - 5} + \frac{x}{x + 5} = 2\frac{2}{3}$ е. $\frac{2x + 5}{x - 2} = \frac{9x - 18}{8x + 20}$

5. Тэгшитгэлийн системийг график ашиглан бод

а. $\begin{cases} 3x + 2y = -4 \\ x + y = -1 \end{cases}$ б. $\begin{cases} -2x + 4y = 4 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$ в. $\begin{cases} 4x - 6y = 3 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$ г. $\begin{cases} x - y = 0 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

6. Тэнцэтгэл бишийн шийд биш мужийг будаж системийн шийдийг дүрсэл.

а. $\begin{cases} x < 2 \\ y < 1 \end{cases}$ б. $\begin{cases} x \le y \\ y \ge 4 - x \end{cases}$ в. $\begin{cases} y - x \le 2 \\ y \ge 1 \\ x \le 3 \end{cases}$ г. $\begin{cases} y \le \frac{1}{3}x + 2 \\ y + x \ge 2 \\ y + 2 \ge x \end{cases}$

7. Малчин X ба Y гэсэн хоёр төрлийн тэжээл хольж малын шахмал тэжээл хийв. Шахмал бүр дор хаяж 60 г протейн, 30 г тос агуулах ёстой. X төрлийн тэжээл нэгж бүрд 15 г протейн, 10 г тос агуулдаг ба нэгжийн үнэ нь 80 төгрөг, харин Y төрлийн тэжээл нэгж бүрд 20 г протейн, 5 г тос агуулдаг ба нэгжийн үнэ нь 50 төгрөг байжээ. Шахмал тэжээлийн үнийг хамгийн бага байлгахын тулд тэжээлийн төрөл тус бүрээс хэдэн нэгжийг авах вэ? Энэ хамгийн бага үнийг ол.

8. Тэгшитгэлийг бод

а. $16^x = 8^{2x-4}$ б. $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$ в. $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

9. Тэгшитгэлийг графикийн аргаар бод

а. $4^x = 2$ б. $2^x = 11 - x$ в. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2 - x$ г. $3^x - 5 = -1 - x$

10. Тэнцэтгэл бишийг бод

а. $\frac{3x+1}{4} > \frac{2x-1}{3} + \frac{2}{3}$ б. $\frac{x+5}{3} - \frac{x-2}{4} \le 2.5$ в. $\frac{2(x-5)}{5} - \frac{3(x+2)}{4} > -7$

г. $x(x-6) > x^2 - 18$ д. $x^2 + 6x \le (x+3)(x+9)$ е. $2x^2 + 5x + 8 > 2x(x-3) - 14$

11. Тэнцэтгэл бишийн шийд болох хамгийн их бүхэл n тоог ол.

а. $2n + 9 < 4 - 3n$ б. $9(n-2) - 7(n-3) < 5$ в. $\frac{3n}{7} + \frac{n}{2} < -1$

12. Тэнцэтгэл бишийн систем хэдэн бүхэл шийдтэй вэ?

а. $\begin{cases} 3x - 5 < 13 \\ \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x > 34 \end{cases}$ б. $\begin{cases} -4x < 3 \\ 6(x-5) < 3x + 3 \end{cases}$ в. $\begin{cases} \frac{1}{3}x + 2 < x + 4 \\ 5x + 6 < 15 + 2x \end{cases}$ г. $\begin{cases} \frac{1}{3}x - 2 < 1 \\ 2x - 3 \ge 13 \end{cases}$

13. Анхаа гурван тоглолтод дунджаар 19 оноо авчээ. Тэр тоглолтын дундаж оноогоо 20- оос багагүй болгохын тулд дөрөвдүгээр тоглолтод хамгийн багадаа хэдэн оноо авах хэрэгтэй вэ?

14. Квадрат тэгшитгэл бод

а. $-2x^2 + 5x + 3 = 0$ б. $\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x - 9 = 0$ в. $16x^2 + 24x + 9 = 0$ г. $5x^2 + 7x - 4\frac{3}{4} = 0$

15. Тэгшитгэлийг бод

а. $3x^4 - 4x^2 + 1 = 0$ б. $(x-2)^4 - 5(x-2)^2 + 4 = 0$ в. $\frac{x}{x-3} + \frac{21}{x^2 - 5x + 6} = 2$

16. Урт нь өргөнөөсөө 3 метрээр их байх хашааны талбай нь 28 квадрат метр. Хашааны урт, өргөний хэмжээг ол.

17. Тэгшитгэлийн системийг графикийн аргаар бод

а. $\begin{cases} 5x - 7y = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$ б. $\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ x + y = 0 \end{cases}$ в. $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$ г. $\begin{cases} 5x - 2y = 2 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

18. Тэгшитгэл бод

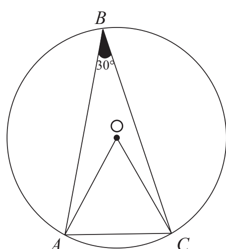
а. $9^x - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$ б. $4^x - 34 \cdot 2^x + 64 = 0$ в. $36^x - 7 \cdot 6^x + 6 = 0$

VII БҮЛЭГ. ТОЙРОГ БА ОЛОН ӨНЦӨГТ

Энэ бүлгийг судалснаар дараах мэдлэг, чадварыг эзэмшинэ.

- *Тойрогт багтсан өнцгийн чанар хэрэглэх*
- *Тойрогт багтсан ба тойрог багтаасан олон өнцөгтийн чанарыг мэдэх, хэрэглэх (гурвалжин, дөрвөн өнцөгт, зөв олон өнцөгт)*
- *Тойргийн хөвч, шүргэгч, огтлогчийн чанарыг хэрэглэх*
- *Цэгийн геометр байрыг ойлгох, хэрэглэх*

7.1. ТОЙРОГТ БАГТСАН ӨНЦӨГ



Жишээ 1. Хэрэв ABC нь $\angle ABC=30^\circ$ байх гурвалжин бол AOC гурвалжны хэлбэрийг тодорхойл. Энэ бодлогыг бодохын тулд дараах асуултуудын дагуу ярилцаарай.
AOC адил хажуут гурвалжин мөн үү?
AOC адил талт гурвалжин мөн үү?
AOC өнцгийн хэмжээг олж болох уу?
ABC өнцгийг юу гэж нэрлэдэг вэ?
Эдгээр өнцгүүд хоорондоо ямар хамааралтай вэ?

Тодорхойлолт. Тойрог дээр оройтой, талууд нь тойргийг огтлох өнцгийг тойрогт **багтсан өнцөг** гэнэ. Тойргийн төв дээр оройтой өнцгийг **төв өнцөг** гэнэ. Тойргийн нумыг төв өнцгөөр хэмжинэ.

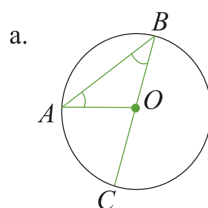
Тойрогт багтсан өнцгийн чанар. Тойрогт багтсан өнцөг нь тулсан нумынхаа хагасаар хэмжигдэнэ.

Санамж Гурвалжны аль нэг орой дахь гадаад өнцөг нь түүнтэй хамар биш хоёр дотоод өнцгийн нийлбэртэй тэнцүү.

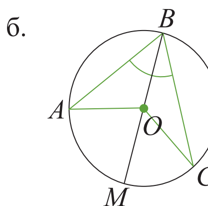
Баталгаа. Дараах 3 тохиолдолд авч үзье.

а. Багтсан өнцгийн нэг тал нь тойргийн төвийг дайрсан байг. AO радиус татахад $AO = BO$ тул $\angle ABO = \angle BAO$ байна. ABO гурвалжны O орой дахь гадаад өнцөг нь $\angle AOC = \angle ABO + \angle BAO = 2\angle ABO$ байна. Иймд $\angle ABC = \angle ABO = \frac{\angle AOC}{2} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$ болно.

а.



б.



б. Багтсан өнцгийн талууд нь тойргийн төвийн хоёр талд байг. BM диаметр татахад $\angle ABC = \angle ABM + \angle CBM$ байна.

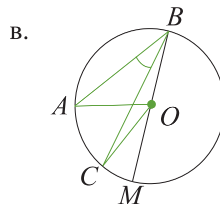
а. тохиолдолд олсон ёсоор $\angle ABM = \frac{\overset{\frown}{AM}}{2}$, $\angle CBM = \frac{\overset{\frown}{CM}}{2}$ тул $\angle ABC = \frac{\overset{\frown}{AM}}{2} + \frac{\overset{\frown}{CM}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$ болно.

в. Багтсан өнцгийн талууд нь тойргийн төвийн нэг талд байг.

BM диаметр татахад $\angle ABC = \angle ABM - \angle CBM$ байна.

а. тохиолдолд олсон ёсоор $\angle ABM = \frac{\overset{\frown}{AM}}{2}$, $\angle CBM = \frac{\overset{\frown}{CM}}{2}$ тул

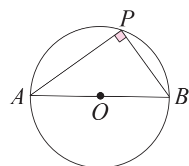
$\angle ABC = \frac{\overset{\frown}{AM}}{2} - \frac{\overset{\frown}{CM}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$ болно.



Жишээ 2. Хэрэв тойрог дээр орших 3 цэгийг холбоход үүсэх гурвалжны нэг тал нь тойргийн диаметр бол уг гурвалжин тэгш өнцөгтэй гэдгийг батал.

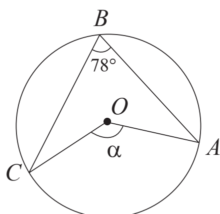
Баталгаа.

APB гурвалжны P орой дахь өнцөг нь тойрогт багтсан өнцөг бөгөөд AB тулсан нумынхаа хагастай тэнцүү. Мөн AB нумд харгалзах төв өнцөг нь $\angle AOB = 180°$ тул $\angle APB = \frac{180°}{2} = 90°$ буюу ΔAPB нь тэгш өнцөгт гурвалжин болж батлагдав.

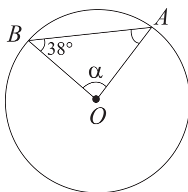


1. Үсгээр тэмдэглэсэн өнцгийн хэмжээг ол.

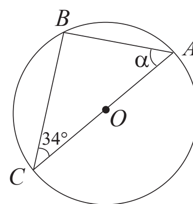
а.



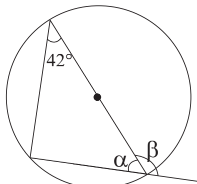
б.



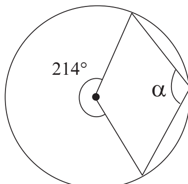
в.



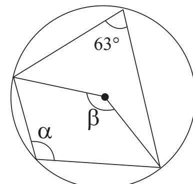
г.



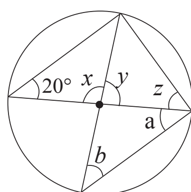
д.



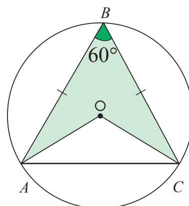
е.



2. Үсгээр тэмдэглэсэн өнцгийн хэмжээг ол. (Зураг а)



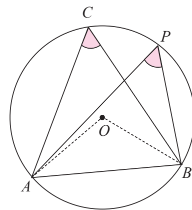
Зураг а



Зураг б

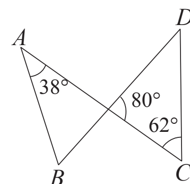
3. Хэрэв тойргийн радиус 2 см бөгөөд $\angle ABC = 60°$, $AB = BC$ бол будсан дүрсийн талбайг ол. (Зураг б)

Ижил нумд тулсан өнцгүүдийн чанар. Тойргийн нэг нумд тулсан уг тойрогт багтсан өнцгүүд тэнцүү байна.



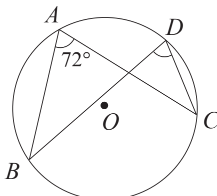
Баталгаа. Зурагт AB нумд харгалзах төв өнцгийг байгуулав. Тойрогт багтсан өнцгийн чанар ёсоор $\angle ACB = \frac{\angle AOB}{2}$, $\angle APB = \frac{\angle AOB}{2}$ тул $\angle ACB = \angle APB$ болж батлагдав.

4. Хэрэв зурагт өгсөн A,B,C,D цэгүүд нэг тойрог дээр орших бол үүссэн бусад өнцгийн хэмжээг ол.

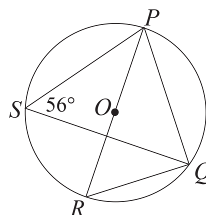


5. а. BDC, BOC өнцгийн хэмжээг ол.
б. PRQ, RPQ өнцгийн хэмжээг ол.

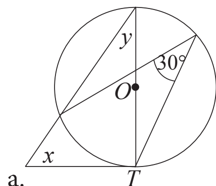
а.



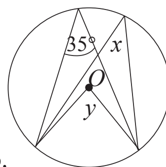
б.



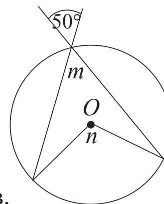
6. Үсгээр тэмдэглэсэн өнцгийн хэмжээг ол.



а.



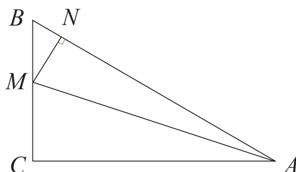
б.



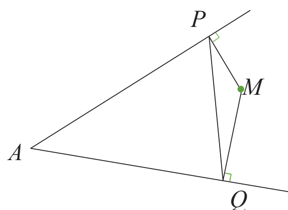
в.

7. Адил хажуут гурвалжны суурьд буулгасан өндөр 10, хажуу талд буулгасан өндөр 12 нэгж бол гурвалжны талбайг ол.

8. ABC тэгш өнцөгт гурвалжны BC катет дээрх M цэгээс AB гипотенузад MN перпендикуляр буулгажээ. $\angle MAN = \angle MCN$ гэж батал. (Зураг а)



Зураг а



Зураг б

9. Хэрэв A оройтой өнцгийн дотор талд орших M цэгээс өнцгийн талууд руу MP ба MQ перпендикуляр буулгасан бол $\angle QPM = \angle MAQ$ гэж батал. (Зураг б)

7.2. ТОЙРОГТ БАГТСАН БА ТОЙРОГ БАГТААСАН ОЛОН ӨНЦӨГТ

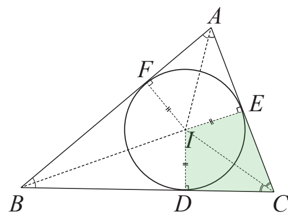
Гурвалжинд багтсан тойрог.

Бид өмнө нь гурвалжинд багтсан болон гурвалжныг багтаасан тойрог байгуулж чаддаг болсон. Одоо гурвалжинд багтсан тойргийн төвийг судалъя.

Тодорхойлолт. (Гурвалжинд багтсан тойрог) Гурвалжны гурван талыг шүргэсэн тойргийг уг гурвалжинд багтсан тойрог гэнэ.

Чанар 1. (Гурвалжинд багтсан тойргийн төв) Гурвалжинд багтсан тойргийн төв нь уг гурвалжны биссектрисүүдийн огтлолцлын цэг байна. Багтсан тойргийн радиус нь түүний төвөөс гурвалжны талд буулгасан перпендикулярын урттай тэнцүү.

Баталгаа. Гурвалжны A, B өнцгийн биссектрисүүдийн огтлолцлыг I үсгээр тэмдэглэж, I цэгээс BC, AC, AB талууд руу харгалзан ID, IE, IF перпендикулярууд татав. I цэгийг C оройтой холбоход үүсэх $\angle ICD=\angle ICE$ өнцгүүд тэнцүү, мөн $IF=ID=IE$ гэж харуулъя.



Тэгш өнцөгт гурвалжны тэнцүүгийн шинжээр $\Delta IAF=\Delta IAE$ болно. Учир нь IA нь биссектрис тул $\angle IAF=\angle ICE$ ба эдгээр гурвалжин нь IA ерөнхий гипотенузтай.

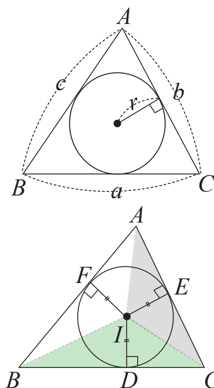
Мөн дээрхтэй адилаар $\Delta IBF=\Delta IBD$ байна.

$\Delta IAF=\Delta IAE$, $\Delta IBF=\Delta IBD$ гэдгээс $IF=ID=IE$ болох тул I дээр төвтэй тойрог багтсан тойрог болно.

ICD, ICE тэгш өнцөгт гурвалжнууд нь IC ерөнхий гипотенузтай бөгөөд $ID=IE$ учраас тэнцүү байна. Иймд $\angle ICD=\angle ICE$ гэдгээс IC нь C өнцгийн биссектрис болно. Өөрөөр хэлбэл I нь биссектрисүүдийн огтлолцлын цэг болж батлагдав.

Жишээ 1. Гурвалжны талбай нь периметрийн хагасыг түүнд багтсан тойргийн радиусаар үржүүлсэнтэй тэнцүү. Хэрэв ABC гурвалжны талын уртыг

$BC=a, AC=b, AB=c$ түүнд багтсан тойргийн радиусыг r гэвэл гурвалжны талбай $S=\dfrac{a+b+c}{2}r$ байна.



Баталгаа. ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төв I цэгээс AB, BC, AC талд харгалзан IF, ID, IE перпендикуляр буулгавал $IF=ID=IE=r$ болно. ABC гурвалжны талбай нь:

$$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta BIS}+S_{\Delta AIC}+S_{\Delta AIB}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot r+\frac{1}{2}\cdot AC\cdot r+\frac{1}{2}\cdot AB\cdot r=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot r\left(BC+AC+AB\right)=\frac{\left(a+b+c\right)}{2}\cdot r$$ болж батлагдав.

10. $AB = AC = 7$, $BC = 4$ байх ABC адил хажуут гурвалжны:
а. Талбайг ол. б. Багтсан тойргийн радиусыг ол.

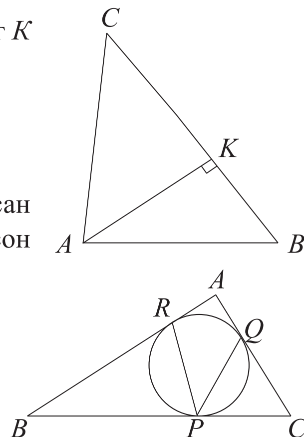
11. а. a талтай зөв гурвалжинд багтсан тойргийн радиусыг ол.
б. 3 см талтай зөв гурвалжинд багтсан тойргийн радиусыг ол.

12. a талтай зөв гурвалжинд багтсан квадратын талын уртыг ол.

13. Хэрэв тэгш өнцөгт гурвалжны гипотенуз 35 см, түүнд багтсан тойргийн радиус 4 см бол гурвалжны талбайг ол.

14. Хэрэв адил хажуут гурвалжны хажуу тал 2 см ба орой дахь өнцөг нь 120° бол түүнд багтсан дугуйн талбайг ол.

15. ABC гурвалжны A оройноос буулгасан өндөр BC талыг K цэгээр огтолжээ. Хэрэв $AC=5$, $AB = KC = 4$ бол
а. AK өндөр
б. BK хэрчмийн уртыг ол.
в. AKC гурвалжинд багтсан тойргийн радиусыг ол.



16. $AB=5, BC=2, AC=4$ талтай ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төвийг I, AI шулууны BC талтай огтлолцсон цэгийг D гэвэл BD хэрчмийн уртыг ол.

17. ABC гурвалжинд багтсан тойргийн шүргэлтийн цэгүүд нь P, Q, R бөгөөд $\angle A = 90°$, $BP = 6$, $PC = 4$ бол:
а. RPQ өнцгийн хэмжээг ол.
б. Гурвалжинд багтсан тойргийн радиусыг ол.

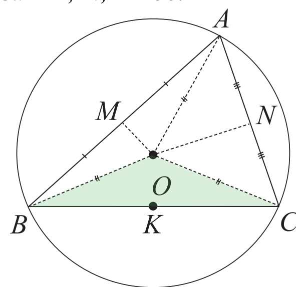
Гурвалжныг багтаасан тойрог.

Тодорхойлолт. Гурвалжны гурван оройг дайрсан тойргийг уг гурвалжныг **багтаасан** тойрог гэнэ.

Чанар 2. (Гурвалжин багтаасан тойргийн төв) Гурвалжин багтаасан тойргийн төв нь гурван талын дунджид татсан перпендикуляруудын огтлолцлын цэг байна. Багтаасан тойргийн радиус нь түүний төвөөс гурвалжны орой хүртэлх зайтай тэнцүү.

Баталгаа. Гурвалжны AB, AC, BC талуудын дунджийг харгалзан M, N, K гэе.

AB, AC талуудын дунджид перпендикуляр татаж, эдгээрийн огтлолцол O цэгийг A оройтой холбоё.

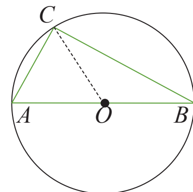


Тэгш өнцөгт гурвалжны тэнцүүгийн шинжээр $\Delta AOM = \Delta BOM$, учир нь эдгээр гурвалжин OM ерөнхий катеттай, $BM = AM$ байна.
Мөн $\Delta AON = \Delta CON$, учир нь эдгээр гурвалжин ON ерөнхий катеттай, $AN = CN$ байна.
$\Delta AOM = \Delta BOM$, $\Delta AON = \Delta CON$ тэнцүү учир $OA = OB = OC = R$ нь багтаасан тойргийн радиус болно.
BOC адил хажуут гурвалжин тул O цэгээс буулгасан өндөр K цэгт бууж, O цэг талуудын дунджид буусан перпендикуляруудын огтлолцлын цэг болж батлагдав.

18. a талтай зөв гурвалжныг багтаасан тойргийн радиусыг ол.

19. Хэрэв тэгш өнцөгт гурвалжны катетууд 5, 12 бол багтсан ба багтаасан тойргийн радиусыг ол.

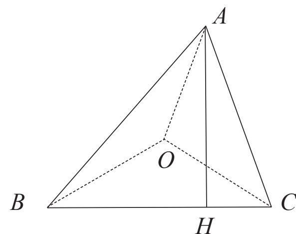
Жишээ 2. Тэгш өнцөгт гурвалжныг багтаасан тойргийн радиус нь гипотенузын хагастай тэнцүү гэж батал.



Баталгаа. Багтаасан тойргийн төвийг C оройтой холбоход үүссэн OA, OB, OC хэрчим нь нэг тойргийн радиус учир тэнцүү. Өөрөөр хэлбэл $OA = OB = OC = R$ болно. Мөн ABC тэгш өнцөгт гурвалжны AB гипотенуз нь багтаасан тойргийн диаметр тул уг тойргийн радиус нь диаметрийн хагастай тэнцүү. Иймд $R = \frac{AB}{2}$ болж батлагдав.

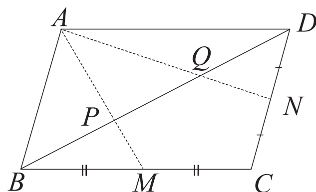
20. Хэрэв тэгш өнцөгт гурвалжны катетууд 2 : 3 харьцаатай, багтаасан тойргийн радиус 6.5 бол катетуудыг ол.

21. Нэг тойрогт багтсан зөв гурвалжин болон квадратын талбайн харьцааг ол.



22. Хэрэв ABC хурц өнцөгт гурвалжныг багтаасан тойргийн төв O, BC талд буулгасан өндөр AH бол $\angle BAH = \angle OAC$ гэж батал.

23. ABC гурвалжинд AA_1, BB_1 медиан татжээ. Хэрэв $\angle CAA_1 = \angle CBB_1$ бол $AC = BC$ болохыг батал.



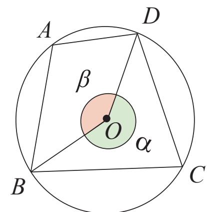
24. $ABCD$ параллелограммын BC, CD талуудын дундджийг харгалзан M, N гэе. Мөн AM, AN шулууны BD диагональтай огтлолцсон цэгүүдийг харгалзан P, Q гэвэл $BP = PQ = QD$ болохыг батал.

Тойрогт багтсан олон өнцөгт.

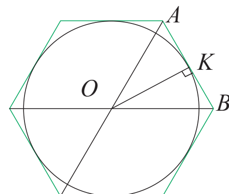
Бид өмнөх хичээлүүдээр гурвалжинд багтсан ба гурвалжныг багтаасан тойргийн талаар судалсан. Одоо тойрогт багтсан дөрвөн өнцөгт болон зөв олон өнцөгтийн талаар судална.

Тодорхойлолт. (Тойрогт багтсан олон өнцөгт) Хэрэв олон өнцөгтийн бүх орой тойрог дээр орших байвал уг олон өнцөгтийг тойрогт **багтсан** олон өнцөгт гэнэ.

Чанар 3. (Тойрогт багтсан дөрвөн өнцөгт) Тойрогт багтсан дөрвөн өнцөгтийн эсрэг өнцгүүдийн нийлбэр 180° байна.



Баталгаа. Тойрогт багтсан $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн хувьд тойргийн төвийг B,D оройтой холбоход үүсэх өнцгүүдийг α, β гэе. Тойрогт багтсан өнцгийн чанараар $\angle A = \frac{1}{2}\alpha$, $\angle C = \frac{1}{2}\beta$ байна. Эндээс $\angle A + \angle C = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ болно. Түүнээс гадна $\alpha + \beta = 360°$ учир $\angle A + \angle C = 180°$ болж батлагдав. Мөн үүнтэй ижил аргаар $\angle ABC + \angle CDA = 180°$ болно гэдгийг батлаарай.



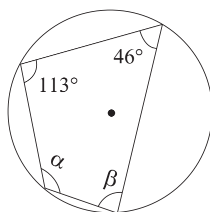
Жишээ 2. Хэрэв зөв зургаан өнцөгтийг багтаасан тойргийн радиус R бол түүнд багтсан тойргийн радиусыг ол.

Бодолт. Багтсан тойргийн радиусыг r гэе. Зөв зургаан өнцөгт нь 6 ширхэг зөв гурвалжнаас тогтоно. Эдгээрийн нэг болох AOB

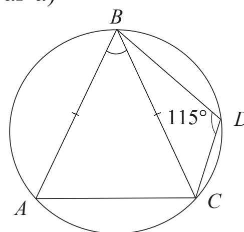
гурвалжны хувьд $OA = OB = AB = R$ нь зөв зургаан өнцөгтийг багтаасан тойргийн радиус байна. Мөн AOK тэгш өнцөгт гурвалжны хувьд Пифагорын теоремоор $r^2 = OK^2 = OA^2 - AK^2 = R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}R^2$ байна. Эндээс $r = \frac{\sqrt{3}}{2}R$ болно.

25. 9 см, 21 см сууриудтай, 8 см өндөртэй адил хажуут трапецыг багтаасан тойргийн радиусыг ол.

26. Үсгээр тэмдэглэсэн өнцгийн хэмжээг ол. (зураг а)



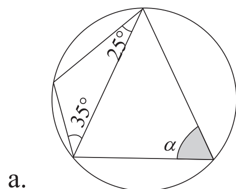
Зураг а

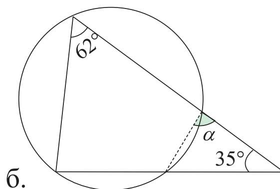


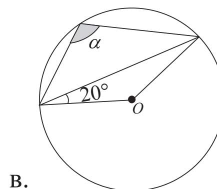
Зураг б

27. Хэрэв ABC адил хажуут гурвалжин $(AB = BC), \angle BDC = 115°$ бол ABC өнцгийн хэмжээг ол. (зураг б)

28. Зураг ашиглан α өнцгийг ол.

а.


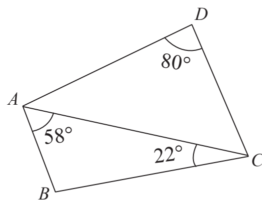
б.


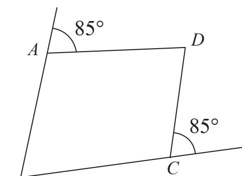
в.


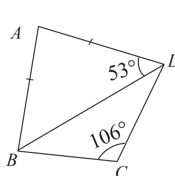
29. Тойргийн радиус R бол уг тойрогт багтсан зөв зургаан өнцөгтийн хувьд:

а. Талыг ол. б. Талбайг ол.

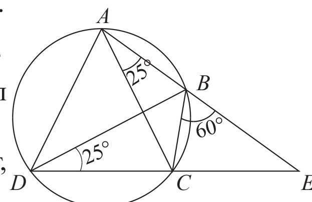
30. $ABCD$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтах эсэхийг тогтоо.

а.


б.


в.


31. Хэрэв дөрвөн өнцгийн аль нэг орой дахь гадаад өнцөг нь түүнтэй хамар өнцгийн эсрэг өнцөгтэй тэнцүү бол уг 4 өнцөгт тойрогт багтана гэж батал.



32. Хэрэв A, B, C, D нь тойрог дээр орших цэг, $\angle BAC = 25°$, $\angle EBC = 60°$ бол

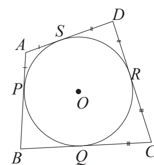
а. $\angle ADC$ б. $\angle ADB$ өнцгийн хэмжээг ол.

Тойрог багтаасан олон өнцөгт.

Тодорхойлолт. Хэрэв олон өнцөгтийн бүх тал тойргийг шүргэж байвал түүнийг тойрог **багтаасан** олон өнцөгт гэнэ.

Чанар 4. Тойрог багтаасан дөрвөн өнцөгтийн эсрэг талуудын нийлбэр тэнцүү байна.

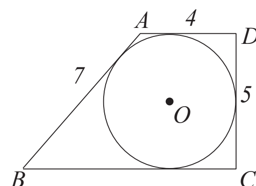
Баталгаа. Тойрог $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн талуудыг P,Q,R,S цэгээр шүргэдэг байг. Шүргэгчийн чанар ёсоор:
$AB+CD=(AP+BP)+(CR+DR)=(AS+BQ)+(CQ+DS)=$
$(BQ+CQ)+(AS+DS)=BC+AD$ болж батлагдав.



33. Квадратад багтсан ба квадратыг багтаасан тойргийн радиусуудын харьцааг ол.

34. Тойрогт багтсан болон тойргийг багтаасан квадратуудын талбайн харьцааг ол.

35. $ABCD$ дөрвөн өнцөгтөд багтсан тойрог өгчээ. BC талын уртыг ол.

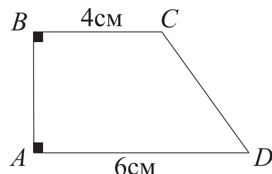


36. Хэрэв зөв зургаан өнцөгтийн нэг тал 6 см бол:
а. Багтсан ба багтаасан тойргийн радиусыг ол.
б. Багтсан ба багтаасан дугуйн талбайн харьцааг ол.

37. 3 см радиустай тойрог ромбод багтжээ. Хэрэв ромбын мохоо өнцөг 120° бол талбайн хэмжээг ол.

38. $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн BD диагональ нь энэ дөрвөн өнцөгтийг багтаасан тойргийн диаметр болно. Хэрэв $BD=2, AB=1$, $\angle ABD : \angle DBC = 4:3$ бол дөрвөн өнцөгтийн бусад талын уртыг ол.

39. Хэрэв $ABCD$ трапецын талбай 25 см² бол:
а. CD талын уртыг ол.
б. Энэ дөрвөн өнцөгтөд тойрог багтах эсэхийг тогтоо.

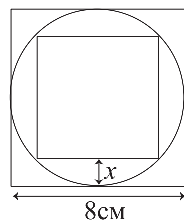


40. ABC хурц өнцөгт гурвалжны AC тал дээр D цэг өгчээ. $AD=1$, $DC=2$, BD нь өндөр болно. A,D цэгийг дайрсан 2 нэгж радиустай тойрог BDC гурвалжныг багтаасан тойргийг D цэгт шүргэнэ. ABC гурвалжны талбайг ол.

41. Хэрэв тойргийг багтаасан адил хажуут трапецын талбай 12.5 нэгж, түүний суурь дахь хурц өнцөг 30° бол хажуу талын уртыг ол.

42. Тойрог дээр A, B, C, D цэг тэмдэглэжээ. Хэрэв A_1,B_1,C_1,D_1 нь харгалзан AB, BC, CD, DA нумын дундаж цэг бол $A_1C_1 \perp B_1D_1$ гэж батал.

43. Тойрогт багтсан болон тойргийг багтаасан квадрат өгчээ. Хэрэв багтаасан квадратын тал 8 см бол x хэмжээг хэрхэн олох вэ? Дараах алхмын дагуу гүйцэтгэ.
а. Тойргийн радиусыг ол.
б. Тойрогт багтсан квадратын талын уртыг ол.
в. x - ийг ол.

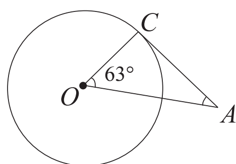


7.3. ТОЙРГИЙН ХӨВЧ, ШҮРГЭГЧ, ОГТЛОГЧИЙН ЧАНАР

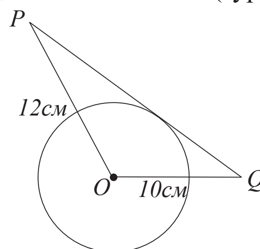
Өмнөх ангиудад судалсан тойргийн хөвч, шүргэгчийн чанаруудыг авч үзье.

	Чанар	Зураг
Тойргийн хөвч	Хөвчийн дундаж цэгт татсан перпендикуляр нь тойргийн төвийг дайрна. Хэрэв $OK \perp AB$ бол $AK = KB$ байна.	
	Тойргийн төвөөс ижил зайд орших хөвчүүд тэнцүү урттай байна. Хэрэв $OM = ON$ бол $AB = CD$ байна.	
Тойргийн шүргэгч	Тойргийн шүргэгч нь шүргэлтийн цэгт татсан радиуст перпендикуляр байна. $AB \perp OC$	
	Тойргийн гадна орших цэгээс тойрогт татсан хоёр шүргэгч тэнцүү. $AB = AC$	

44. Хэрэв AC нь тойргийн шүргэгч бол $\angle OAC$ өнцгийн хэмжээг ол. (зураг а)



Зураг а



Зураг б

45. Хэрэв PQ нь O цэгт төвтэй тойргийн шүргэгч, тойргийн радиус нь 8 см, $PO = 12$ см, $OQ = 10$ см бол POQ гурвалжны талбайг ол. (зураг б)

Дараах алхмын дагуу гүйцэтгэ.

а. Тойргийн төвөөс PQ шүргэгчид перпендикуляр буулга.

б. PQ хэрчмийн уртыг ол.

в. POQ гурвалжны талбайг ол.

46. O цэгт төвтэй тойргийн гадна орших A цэгээс AC, AB хоёр шүргэгч татжээ. Хэрэв $AC = 6$ см, тойргийн радиус 3 см бол AB, AO хэрчмийн уртыг ол.

Чанар 1. (Тойргийн хөвч болон шүргэгчийн хооронд үүсэх өнцөг) Тойргийн AB хөвч болон A цэгт татсан шүргэгч шулууны хоорондох өнцөг нь AB нумд тулсан багтсан өнцөгтэй тэнцүү.

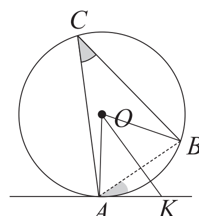
Баталгаа. AB нумд харгалзах төв өнцгийг байгуулъя.

а. ACB тойрогт багтсан өнцөг тул $\angle AOB = 2 \cdot \angle ACB$ байна.

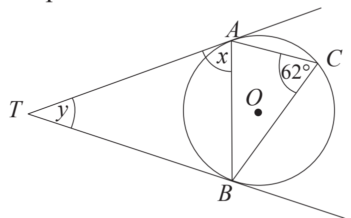
б. AOB адил хажуут гурвалжин тул $\angle OAB = \angle OBA$ байна.

в. AOB өнцгийн биссектрисийн шүргэгчтэй огтлолцсон цэгийг K гэвэл AOK нь тэгш өнцөгт гурвалжин болно.

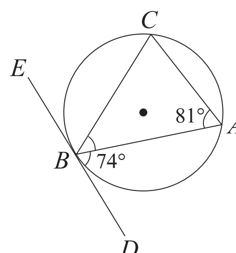
г. $\angle ACB = \angle AOK = 90° - \angle AOB = \angle BAK$ болж батлагдав.



47. Үсгээр тэмдэглэсэн өнцгийн хэмжээг ол. (зураг 9)



Зураг 9

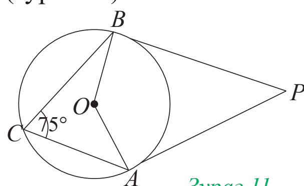


Зураг 10

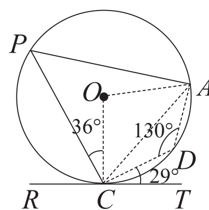
48. Хэрэв ED нь тойргийн шүргэгч, $\angle CAB = 81°$, $\angle ABD = 74°$ бол $\angle ABC$ өнцгийн хэмжээг ол. (зураг 10)

49. Хэрэв A, B, C нь тойрог дээр орших цэг, O нь тойргийн төв, $\angle BCE = 65°$, FE нь C цэгт татсан тойргийн шүргэгч бол ABC гурвалжны өнцгийг ол.

50. Хэрэв A, B, C нь тойрог дээр орших цэг, O нь тойргийн төв, PA болон PB нь тойргийн шүргэгч, $\angle ACB = 75°$ бол а. $\angle AOB$ б. $\angle APB$ өнцгийн хэмжээг ол. (зураг 11)



Зураг 11

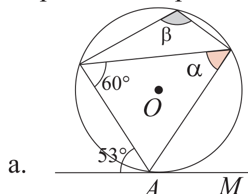


Зураг 12

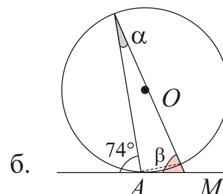
51. $\angle ACT$ өнцгийн хэмжээг ол. (зураг 12)

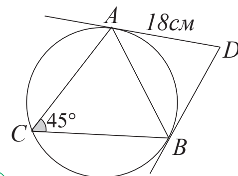
52. Хэрэв AM тойргийн шүргэгч бол α, β өнцгийн хэмжээг ол.

а.



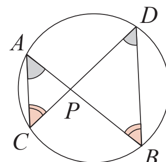
б.





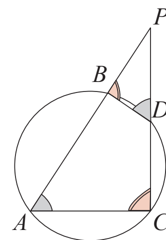
53. *A,B,C* нь тойрог дээр орших цэг, *A, B* цэгийг дайруулан шүргэгч татав.
Хэрэв $AD = 18$ см, $\angle ACB = 45°$ бол *AB* хөвчийн уртыг ол.

> **Теорем 1. (Огтлолцсон хөвч)** Хэрэв тойргийн *AB, CD* хоёр хөвчийн огтлолцлын цэг *P* бол $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ байна.



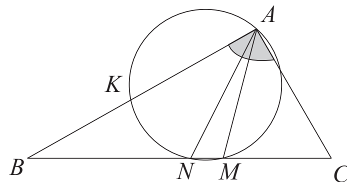
Баталгаа.
PAC, PDB хоёр гурвалжин төсөөтэй. Учир нь тойрогт багтсан өнцгийн чанараар *CB* нумд тулсан $\angle CAP = \angle BDP$ өнцгүүд тэнцүү. Мөн *AD* нумд тулсан $\angle ACP = \angle DBP$ өнцгүүд тэнцүү. Иймд $PA : PD = PC : PB$ буюу $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ болно.

> **Мөрдлөгөө 1. (Тойргийн огтлогч)** Хэрэв тойргийн гадна орших *P* цэгээс татсан хоёр шулуун тойргийг *A, B, C, D* цэгээр огтолж байвал $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ байна.



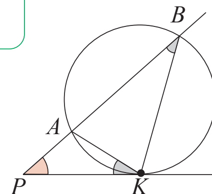
Баталгаа. Тойрогт багтсан дөрвөн өнцөгтийн аль нэг орой дахь гадаад өнцөг нь түүний эсрэг орших өнцгийн хэмжээтэй тэнцүү ($\angle PAC = \angle PDB$, $\angle PCA = \angle PBD$) байна. Иймд *PAC, PDB* хоёр гурвалжин төсөөтэй. Өөрөөр хэлбэл $\dfrac{PA}{PD} = \dfrac{PC}{PB}$ буюу $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ болно.

54. Тойргийн *AB, CD* хоёр хөвчийн огтлолцлын цэг нь *P*, $PA = 5, PC = 6, CD = 8$ бол:
а. *P* нь тойргийн дотор талд
б. *P* нь тойргийн гадна талд байх үед *AB* хөвчийн уртыг ол.



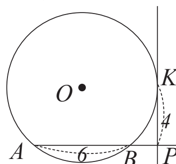
55. *ABC* гурвалжны талууд $BC = 6$, $AB = 5$, $AC = 4$, *AM* нь *BAC* өнцгийн биссектрис, *AN* нь *A* оройгоос *BC* тал руу татсан медиан байг. *AMN* гурвалжныг багтаасан тойргийн *AB* талтай огтлолцсон цэг нь *K* бол
а. *BM* б. *BK* хэрчмийн уртыг ол.

> **Теорем 2. (Тойргийн шүргэгч ба огтлогч)** Тойргийн гадна орших *P* цэгээс татсан *PB* огтлогч, *PK* шүргэгчийн хувьд $PK^2 = PA \cdot PB$ байна. Энд *A* нь *PB* огтлогчийн тойргийг огтлох цэг.

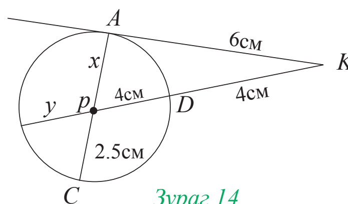


Баталгаа: *PAK, PKB* хоёр гурвалжин төсөөтэй, учир нь тойргийн хөвч болон шүргэгчийн хооронд үүсэх өнцгийн чанар ёсоор $\angle PKA = \angle PBK$, *P* ерөнхий өнцөгтэй байна. Иймд төсөөтэй гурвалжны харьцаа ашиглавал $PA : PK = PK : PB$ буюу $PK^2 = PA \cdot PB$ болно.

56. AP тойргийн огтлогч PK нь шүргэгч, $AB = 6$, $PK = 4$ бол PA хэрчмийн уртыг ол. (зураг 13)



Зураг 13



Зураг 14

57. Үсгээр тэмдэглэсэн хэрчмийн уртыг ол. (зураг 14)

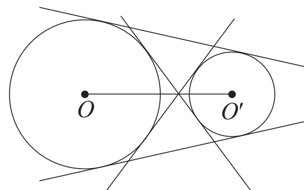
Хоёр тойргийн харилцан байршил.

Хоёр тойргийн харилцан байршлыг авч үзье. Хоёр тойргийн радиусыг r_1 ба r_2, төвүүдийн хоорондох зайг d гэе. Тэгвэл дараах байршлууд үүснэ.

I. $d > r_1 + r_2$	II. $d = r_1 + r_2$	III. $d < r_1 + r_2$
Огтлолцоогүй	Гадаад шүргэлттэй	Огтлолцсон
IV. $d = r_1 - r_2$	V. $d < r_1 - r_2$	VI. $d = 0$, $O_1 \equiv O_2$
Дотоод шүргэлттэй	Нэг тойрог нөгөө тойргийн дотор орших	Ерөнхий төвтэй

Жишээ 1. Огтлолцоогүй хоёр тойрог хэдэн ерөнхий шүргэгчтэй вэ?

Бодолт. Хүснэгтийн I тохиолдлын хоёр тойргийн шүргэгчийг зургаар үзүүлье. Огтлолцоогүй хоёр тойрог 4 ерөнхий шүргэгчтэй байна.



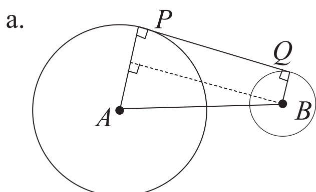
58. Дээрх хүснэгтийн II-VI тохиолдол тус бүрд шүргэгч байх эсэхийг тогтоож, зургаар харуул.

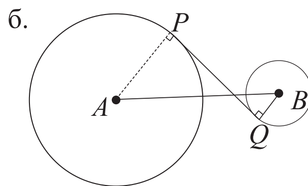
59. Хоёр тойргийн төвүүдийн хоорондох зай $d = 6$ ба $r_2 = 2$ байх үед хэрэв r_1 нь:
а. $r_1 = 3$ б. $r_1 = 4$ в. $r_1 = 8$ г. $r_1 = 10$ бол тохиолдол тус бүрд хоёр тойргийн харилцан байршлыг тодорхойлж, зургийг зур.

60. Хоёр тойрог гадаад шүргэлттэй бөгөөд тэдгээрийн радиус 2 : 3 харьцаатай байв. Хэрэв тойргийн төвүүд 10 см зайтай бол тойрог бүрийн диаметрийг ол.

61. Хоёр тойрог дотоод шүргэлттэй бөгөөд тэдгээрийн радиус 5 : 2 харьцаатай байв. Хэрэв тойргийн төвүүд 15 см зайтай бол хоёр тойргийн радиусыг ол.

62. Хэрэв *A, B* цэг дээр төвтэй хоёр тойргийн радиус нь харгалзан 11, 4 төвүүдийн хоорондох зай 25 бол *PQ* шүргэгчийн уртыг ол.

а.


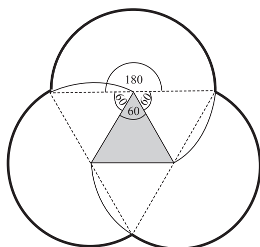
б.


63. Огтлолцсон хоёр тойрог өгчээ. Хэрэв эдгээр тойргийн радиус 3 см ба 5 см, төвүүдийн хоорондох зай 7 см бол

а. Ерөнхий шүргэгчийг байгуул.

б. Шүргэлтийн цэгүүдийн хоорондох зайг ол.

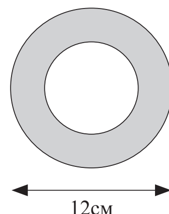
64. Компанийн лого өгөгджээ. Хэрэв тойргийн радиус 6 см бол:



а. Будсан гурвалжны талбайг олж, хариугаа 0.1 нарийвчлалтай тоймло.

б. Нийлмэл дүрс буюу логоны нийт талбайг олж, хариугаа 0.1 нарийвчлалтай тоймло.($\pi \approx 3.14$ гэж авна)

Хэрэглэгдэхүүн: тооны машин



65. Хэрэв том тойргийн диаметр 12 см, будсан хэсгийн талбай 50 см^2 бол жижиг тойргийн диаметрийг ол.

66. Өгсөн цэгийг дайрсан *R* радиустай тойргийн төвүүд ямар дүрс үүсгэх вэ? Байгуулалт хийж харуул.

67. Гурван тойрог өгчээ. *T* нь I ба III тойргуудын шүргэлтийн цэг, *P* ба *Q* нь I ба II тойргийн огтлолцлын цэгүүд байг. *PR, QR* нь II тойргийн шүргэгч, *RT* нь III тойргийн диаметр болно. Хэрэв *PR* = 10 см, *RS*=6 см, *RU* = $3\sqrt{3}$ см бол:

а. Гурван тойргийн харилцан байршлын талаар ярилцаарай.

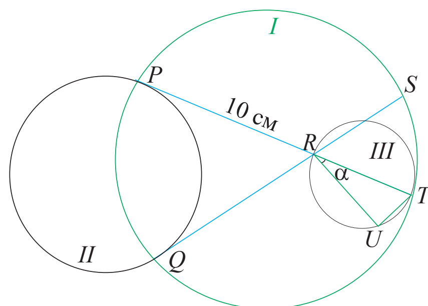
б. $QR = ?$

в. *PT, QS* нь I тойргийн хувьд юу болох вэ? Нэрлээрэй.

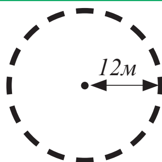
г. $RT = ?$

д. *RTU* гурвалжны хэлбэрийг тодорхойл.

е. α өнцгийн хэмжээг ол.



7.4. ЦЭГИЙН ГЕОМЕТР БАЙР



Морийг гадаснаас 12 м урттай аргамжаагаар аргамжжээ. Морины идээшлэх газрыг будаж үзүүл.
Будсан хэсгээ геометр үг хэллэг хэрэглэн хэрхэн тодорхойлж болох вэ?

Тодорхойлолт. Тодорхой шинж чанартай цэгийн олонлогийг **цэгийн геометр байр** гэнэ. Цэгийн геометр байр нь өгсөн нөхцөлийг хангах цэг, шулуун, муруй эсвэл муж байж болно.

Жишээ 1. Дараах 2 нөхцөлөөр өгсөн цэгийн геометр байр ямар дүрс вэ? Тайлбарла

Нөхцөл	Цэгийн геометр байр
а. Өгсөн цэгээс ижил зайд орших цэгүүдийн олонлог	Цэгийн геометр байр; a; a; a; a; a; Бэхэлсэн цэг
б. Огтлолцсон хоёр шулуунаас ижил зайд орших цэгийн олонлог	Цэгийн геометр байр; a; O; b; Огтлолцсон 2 шулуун

68. M цэг авч, энэ цэгээс 2.5 см зайд орших цэгийн геометр байрыг ол.

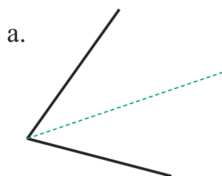
69. A, B хоёр цэг авч, эдгээр цэгээс ижил зайд орших цэгийн геометр байрыг олж, үүссэн дүрсийг нэрлэ.

70. Параллел хоёр шулуунаас ижил зайд орших цэгийн геометр байрыг ол.

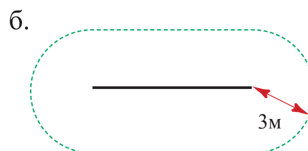
71. Шулуун зурж, энэ шулуунаас 2.3 см зайд орших цэгийн геометр байрыг ол.

72. Цэгийн геометр байрыг зураг дээр тасархай зураасаар харуулсан бол үүнийг тодорхойлж бич.

а.



б.

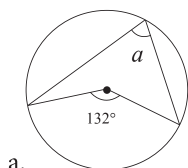


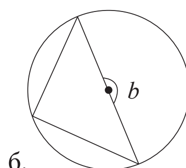
73. A, B цэгүүдийн хоорондох зай 4 см бол A цэгээс 3 см, B цэгээс 2 см зайд орших цэгийн геометр байрыг ол.

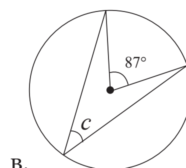
74. Тойрог дээр бэхлэгдсэн A цэг өгчээ. A цэгт эхтэй хөвчүүдийг A цэгээс эхлэн 1 : 2 харьцаатай хуваах цэгийн геометр байрыг олж, зургаар харуул.

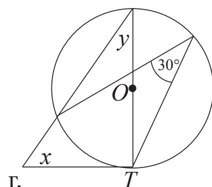
БҮЛГИЙН НЭМЭЛТ ДААЛГАВАР

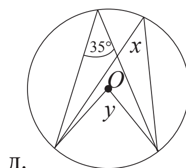
1. Үсгээр тэмдэглэсэн өнцгийн хэмжээг ол.

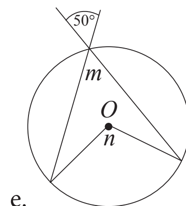


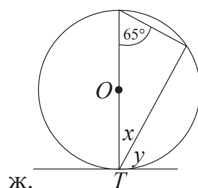


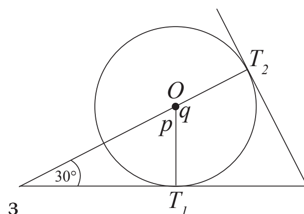


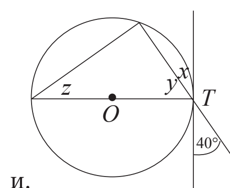


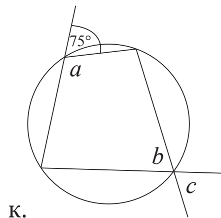


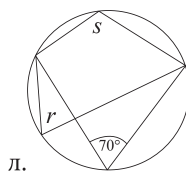


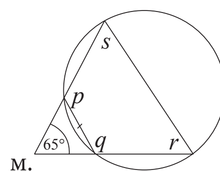


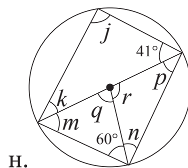


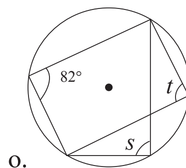


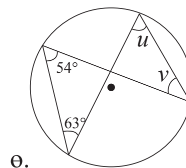










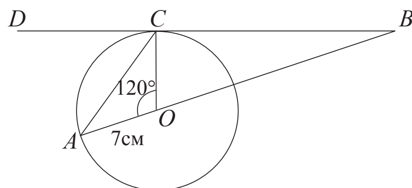


2. Хэрэв *A, B* нь тойрог дээр орших цэгүүд, *O* нь тойргийн төв, *PA* болон *PB* нь тойргийн шүргэгчид, $\angle AOP = 56°$ бол а. $\angle APO$ б. $\angle AOB$ өнцгийн хэмжээг ол.

3. *A, C* нь тойрог дээр орших цэгүүд бөгөөд *O* нь тойргийн төв байг. Хэрэв *DC* нь *C* цэгт татсан тойргийн шүргэгч, $OA = 7$ см, $\angle AOC = 120°$ бол:

а. $\angle CBO$ өнцгийн хэмжээг ол.

б. *BC* хэрчмийн уртыг ол.



4. Координатын хавтгайд:

а. $y = 2x - 2,\ y = -2x + 2$ шулуун байгуул.

б. Эдгээр шулуунаас ижил зайд орших цэгийн геометр байрыг байгуулж, тэгшитгэлийг бич.

5. Координатын хавтгайд:

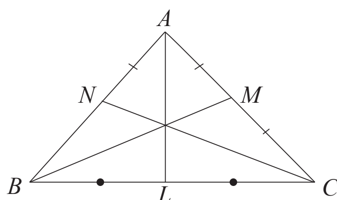
а. $y = \frac{4}{3}x - 4$ шулуун байгуул.

б. Шулууны *Ox, Oy* тэнхлэгтэй огтлолцох цэгүүдийг олж, *A, B* үсгээр тэмдэглэ.

в. *A, B* цэгүүдээс ижил зайд орших цэгийн геометр байрыг байгуул.

г. Цэгийн геометр байрын тэгшитгэлийг бич.

6. *ABC* гурвалжинд *AK,BM,CN* гурван медиан татжээ. $AB + AC > 2AK$ болохыг батал.



7. *A, B* хоёр цэгийн хоорондох зай 4 см. Дараах нөхцөлийг хангах P цэгийн геометр байрыг дүрсэл.

а. *AP* = 4 см, *BP* = 1 см

б. *AP* = 2 см, *BP* = 3 см

в. *AP* = 1 см, *BP* = 4 см

г. *AP* +*BP* = 5 см

8. Хэрэв *ABC* тэгш өнцөгт гурвалжны катетууд 7 см, 24 см бол

а. Гурвалжинд багтсан тойргийн радиусыг ол.

б. Гурвалжныг багтаасан тойргийн радиусыг ол.

9. Хэрэв тойргийг багтаасан адил хажуут трапецын талбай 40.5 нэгж, суурь дахь хурц өнцөг нь 30° бол хажуу талын уртыг ол.

10. Тойрог дээр орших *M* цэгийг дайрсан хөвчүүдийн дундаж цэгийн геометр байрыг олж, тасархай зураасаар харуул.

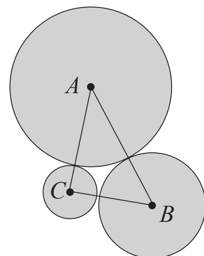
11. 3 см, 4 см, 5 см талуудтай гурвалжин байгуулж:

а. Гурвалжны өнцгийн биссектрисүүдийн огтлолцлыг олж, *M* үсгээр тэмдэглэ.

б. *M* цэгээс 1 см зайд орших цэгийн геометр байрыг тасархай зураасаар харуул.

в. Багтсан ба багтаасан тойргийн радиусыг ол.

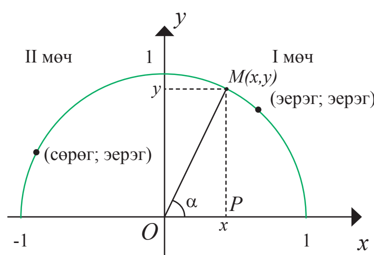
12. *A, B, C* цэг дээр төвтэй 4 см, 8 см, 12 см диаметртэй гурван тойрог өгчээ. *ABC* нь тэгш өнцөгт гурвалжин гэдгийг батал.



VIII БҮЛЭГ. ТРИГОНОМЕТР ХАРЬЦАА

- *0°-ээс 180° хоорондох өнцгийн тригонометр харьцааг мэдэх, тооцоолох*
- *Косинус, синусын теоремыг мэдэх, гурвалжны бодлого бодоход хэрэглэх*
- *Гурвалжны талбай олох*

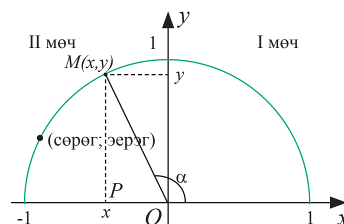
8.1. 0°-ЭЭС 180° ХООРОНДОХ ӨНЦГИЙН ТРИГОНОМЕТР ХАРЬЦАА



Координатын эх $O(0,0)$ цэгт төвтэй, нэгж радиустай хагас тойрог авч үзье.

Хагас тойргийн цэгийн координат ямар тэмдэгтэй байна вэ?

Координатын хавтгайн I мөчид орших уг тойргийн цэгийн хувьд абсцесс, ординат нь хоёул эерэг, II мөчид орших цэгийн хувьд абсцесс нь сөрөг, ординат нь эерэг утга авч байна. Хагас тойргийн I мөчид дурын M цэг авъя. OM хэрчим ба Ox тэнхлэгийн хооронд цагийн зүүний эсрэг чиглэлд үүсэх өнцөг нь 0°-ээс 90° байна. Иймд OMP гурвалжны хувьд тригонометр харьцааг бичвэл $\sin\alpha = \frac{MP}{OM} = \frac{y}{1} = y$, $\cos\alpha = \frac{OP}{OM} = \frac{x}{1} = x$ гэж олдоно.



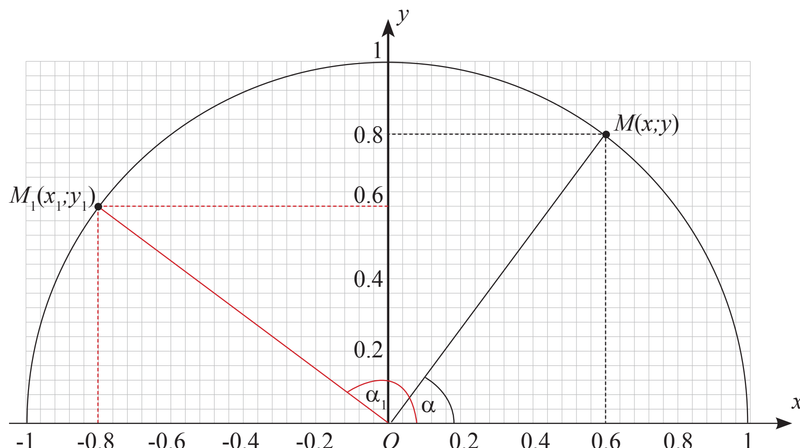
Тэгвэл одоо M цэг II мөчид орших буюу OM хэрчим Ox тэнхлэгтэй 90°-ээс 180° өнцөг үүсгэх үед уг өнцгийн тригонометр харьцааг хэрхэн өргөтгөн тодорхойлдгийг үзье. OM радиус нь x тэнхлэгийн эерэг чиглэлтэй α өнцөг үүсгэдэг байг.

Тодорхойлолт. M цэгийн ординатыг OM радиусын уртад харьцуулсан харьцааг α өнцгийн **синус** гэнэ. Өөрөөр хэлбэл $\sin\alpha = \frac{y}{OM} = \frac{y}{1} = y$ байна. M цэгийн абсцессыг OM радиусын уртад харьцуулсан харьцааг α өнцгийн **косинус** гэнэ. Өөрөөр хэлбэл $\cos\alpha = \frac{x}{OM} = \frac{x}{1} = x$ байна. M цэгийн ординатыг түүний абсцесст харьцуулсан харьцааг α өнцгийн **тангенс** гэнэ. Өөрөөр хэлбэл $\mathrm{tg}\alpha = \frac{MP}{OP} = \frac{y}{x}$ байна.

Иймд $\alpha = 0°$ үед $x = 1,\ y = 0$ болох тул $\sin 0° = 0, \cos 0° = 1,\ \mathrm{tg}0° = \frac{\sin 0°}{\cos 0°} = \frac{0}{1} = 0$ байна.

Харин $\alpha = 90°$ үед $x = 0,\ y = 1$ болох тул $\sin 90° = 1, \cos 90° = 0,\ \mathrm{tg}90° = \frac{\sin 90°}{\cos 90°} = \frac{1}{0}$ тул tg90° тодорхойлогдохгүй. Мөн $\alpha = 180°$ үед $x = -1,\ y = 0$ болох тул $\sin 180° = 0$, $\cos 180° = -1,\ \mathrm{tg}\,180° = \frac{\sin 180°}{\cos 180°} = \frac{0}{-1} = 0$ байна.

Зураг дээрх α өнцгийг хэмжвэл ойролцоогоор 54° байна. Зураг дээрх хуваариас харахад x=0.6, y=0.8, $0.6^2+0.8^2=1$ байна. Иймд $\sin 54° \approx 0.8$, $\cos 54° \approx 0.6$ болно.



Энэхүү үр дүнг тооны машин ашиглан шалгая. Тооны машинд гарсан хариуг зууны нарийвчлалтай авбал, $\sin 54° \approx 0.80$, $\cos 54° \approx 0.58$, $\text{tg}54° \approx \frac{0.8}{0.58}=\frac{40}{29}$ гэж гарч байна.

Мөн α гэсэн мохоо өнцгийн хувьд тодорхойлолт ёсоор синус, косинус, тангенс нь $\sin\alpha = y$, $\cos\alpha = x$, $\text{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ байна. Координатын хавтгайн II мөчид орших M_1 цэгийн хувьд өмнөхтэй адил тооцоо хийе. OM_1 хэрчмийн Ox тэнхлэгтэй эерэг чиглэлд үүсгэх α_1 өнцгийг хэмжвэл ойролцоогоор 144° болно. Мөн M_1 цэгийн хувьд x_1= –0.8, y_1=0.6 байна. Иймд $\sin 144° \approx 0.6$, $\cos 144° \approx -0.8$, $\text{tg}144° \approx -0.75$ болно.

Энэхүү үр дүнг тооны машин ашиглан тооцоолж гарсан хариуг зууны нарийвчлалтай авбал $\sin 144° \approx 0.58$, $\cos 144° \approx -0.80$, $\text{tg}144° \approx -0.73$ гэж гарч байна.

Энд 90°-180° хоорондох косинус ба тангенсын утга сөрөг байгааг анхаарах хэрэгтэй.

Эмхэтгэлийн томьёо. Хэрэв $\alpha < 90°$ бол $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$, $\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$, $\text{tg}(180°-\alpha)=-\text{tg}\alpha$ байна.

Жишээ 1. Зураг ашиглан өнцгийн синус, косинусын утгыг ойролцоогоор ол.

а. sin40°=? б. cos70°=? в. sin130°=? г. cos140°=?

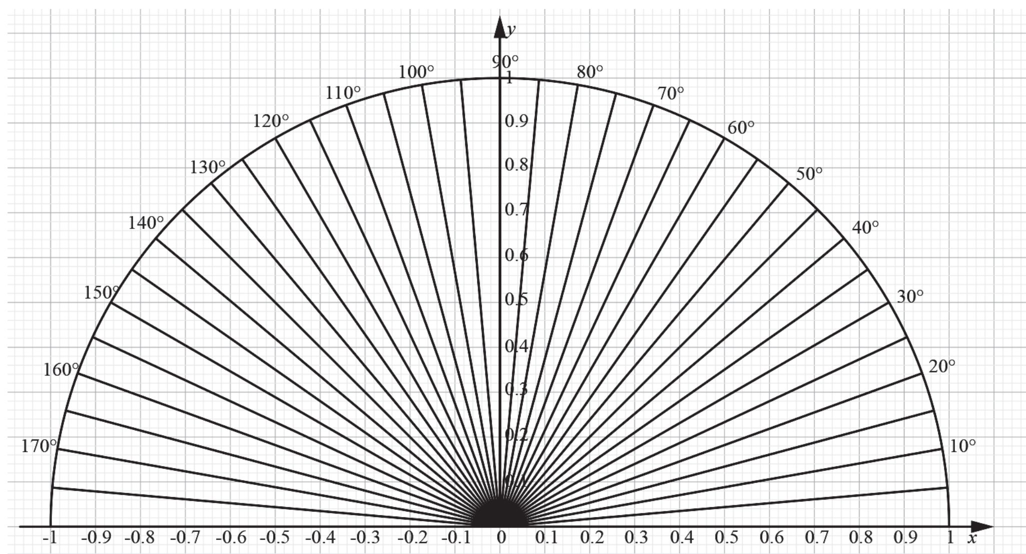
Бодолт.

а. sin40°-ийн утгыг олохын тулд 40°-т харгалзах y координатыг олно. Энэ нь 0.64 байна. Иймд sin40°≈0.64 байна.

б. cos70°-ийн утгыг олохын тулд 70°-т харгалзах x координатыг олно. Энэ нь 0.34 байна. Иймд sin70°≈0.34 байна.

в. sin130°-ийн утгыг олохын тулд 130°-т харгалзах y координатыг олно. Энэ нь 0.76 байна. Иймд sin130°≈0.76 байна.

г. cos140°-ийн утгыг олохын тулд 140°-т харгалзах x координатыг олно. Энэ нь –0.76 байна. Иймд cos140°≈–0.76 байна.



1. а. Зураг ашиглан дараах хүснэгтийг нөх.

Өнцөг	10°	30°	50°	70°	90°	110°	130°	150°	170°
Синус /*y* координат/									
Косинус /*x* координат/									

б. Тооны машины ашиглан дараах хүснэгтийг нөх.

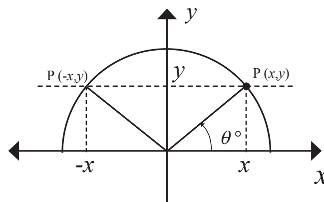
Өнцөг	20°	40°	60°	80°	100°	120°	140°	160°	180°
Синус /*y* координат/									
Косинус /*x* координат/									

в. б-д хийсэн хүснэгтээс синусын утгууд тэнцүү байх өнцгүүдийг ажигла.

г. в-д ажигласан өнцгүүд дээрх косинусын утгууд ямар байгааг ярилц.

д. б-д олсон синус болон косинусын утгуудыг координатын хавтгайд цэгээр тэмдэглэж, муруйгаар холбо. Ямар хэлбэртэй муруй үүсэж байна вэ? Ярилц.

Дүгнэлт. Хэрэв α хурц өнцөг бол $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ нь хоёулаа эерэг утгатай. Хэрэв α мохоо өнцөг бол $\cos\alpha$ нь сөрөг, $\sin\alpha$ нь эерэг утгатай. $\sin\left(180° - \alpha\right) = \sin\alpha, \cos\left(180° - \alpha\right) = -\cos\alpha$



2. а. Хэрэв $\cos\alpha = 0.8$, $0° < \alpha < 90°$ бол $\sin\alpha$-г ол.

б. Хэрэв $\sin\alpha = 0.7$, $0° < \alpha < 90°$ бол $\cos\alpha$-г ол.

в. Хэрэв $\cos\alpha = -0.5$, $90° < \alpha < 180°$ бол $\sin\alpha$-г ол.

г. Хэрэв $\sin\alpha = 0.6$, $90° < \alpha < 180°$ бол $\cos\alpha$-г ол.

3. Дараах өнцгүүдтэй ижил синусын утгатай мохоо өнцгүүдийг ол.

а. 35° б. 41° в. 84° г. 62°

4. Дараах өнцгүүдтэй ижил синусын утгатай хурц өнцгүүдийг ол.

а. 140° б. 136° в. 152° г. 161°

5. а. Хэрэв sin44° ≈ 0.69 бол sin136°-ыг ол.

б. Хэрэв cos57° ≈ 0.54 бол cos123°-ыг ол.

в. Хэрэв sin75° ≈ 0.96 бол sin105°-ыг ол.

г. Хэрэв cos166° ≈ –0.97 бол cos14°-ыг ол.

6. Хэрэв x нь 0-180°-ын хооронд орших бол x-ийг ол.

а. $\cos x = 0.42$ б. $\cos x =-0.57$ в. $\cos x = 0.62$ г. $\cos x =-0.88$

7. Хэрэв x нь мохоо бол x-ийг ол.

а. $\sin x =0.83$ б. $\sin x =0.99$ в. $\sin x =0.55$ г. $\sin x =0.76$

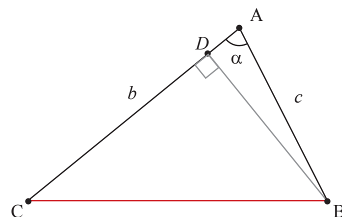
8. Хэрэв x нь $0\text{-}180^0$-ын хооронд орших бол x-ийн боломжит хоёр утгыг ол.

а. $\sin x =0.58$ б. $\sin x =0.2588$ в. $\sin x =0.6691$ г. $\sin x =0.45$

8.2. КОСИНУС, СИНУСЫН ТЕОРЕМ

Жишээ 1. *ABC* гурвалжны *AC=b, AB=c ба A* оройн өнцөг α байх *ABC* гурвалжин өгсөн байг.

а) *BD* өндрийн уртыг ол.
б) *AD* хэрчмийн уртыг ол.
в) *CD* хэрчмийн уртыг ол.
г) *BC* талын уртыг ол.



Зураг 1. *А оройн өнцөг хурц үед өндрийн суурь D цэг AC тал дээр оршино.*

Бодолт.

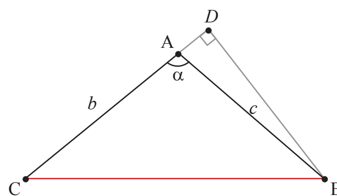
а) *ADB* тэгш өнцөгт гурвалжны хувьд $BD=c\sin\alpha$ болно.
б) *ADB* тэгш өнцөгт гурвалжны хувьд $AD=c\cos\alpha$ болно.
в) $CD = bc-\cos\alpha$ болно
г) *BC* нь *BDC* тэгш өнцөгт гурвалжны гипотенуз болох учир

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 = c^2\sin^2\alpha + (b - c\cos\alpha)^2 = c^2\sin^2\alpha + b^2 - 2bc\cos\alpha + c^2\cos^2\alpha =$$

$$= b^2 + c^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) - 2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

A оройн өнцөг хурц үед *BC* талын уртыг нөгөө хоёр талын урт ба тэдгээрийн хоорондох өнцгийн косинусаар илэрхийллээ. Бусад талуудын хувьд ч хоёр тал хоорондох өнцөг өгснөөр гурав дахь талын уртыг олж болно.

Санамж *A* оройн өнцөг мохоо үед *BD* өндрийн суурь *D* цэг *AC* талын үргэлжлэл дээр оршино. Энэ тохиолдолд мөн өмнөх шиг даалгаврыг гүйцэтгэж $BC^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ болохыг бие дааж батал.



Зураг 2. *А оройн өнцөг мохоо үед*

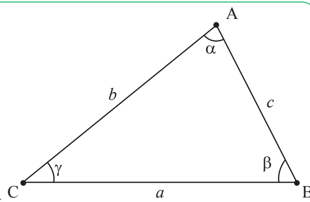
Косинусын теорем. Аливаа ABC гурвалжны хувьд

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ биелнэ.

Энд $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$



Гурвалжны хоёр талын урт, хоорондох өнцгийн хэмжээ мэдэгдсэн үед косинусын теоремыг ашиглан гурав дахь талын уртыг олно.

Косинусын теоремоос гурвалжны өнцгийн косинусыг олох томьёо бичиж болно.

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos\beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Гурвалжны гурван талын урт мэдэгдсэн үед энэ томьёог ашиглан гурвалжны өнцгүүдийг олж болно.

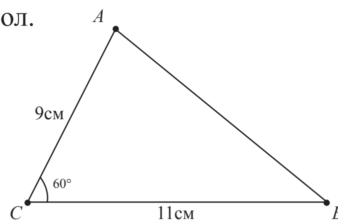
Жишээ 8. Зурагт өгсөн ABC гурвалжны AB талын уртыг ол.

Бодолт. Косинусын теоремоор

$$AB^2 = 9^2 + 11^2 - 2\cdot 9\cdot 11\cdot\cos 60°$$

$$AB = \sqrt{9^2 + 11^2 - 2\cdot 9\cdot 11\cdot\cos 60°}$$

$$AB = \sqrt{9^2 + 11^2 - 2\cdot 9\cdot 11\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{103}$$



Жишээ 9. Зурагт өгсөн ABC гурвалжны B оройн өнцгийг ол.

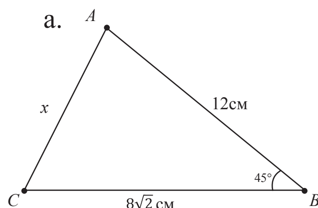
Бодолт. B оройн өнцгийг β гэе. Өнцгийн косинус олох томьёо бичье.

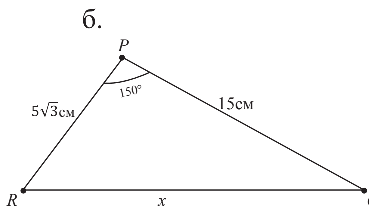
$$\cos\beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{25 + 64 - 49}{2\cdot 5\cdot 8} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$$

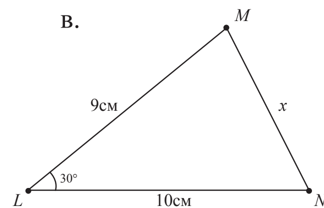
A
7см
5см
?
C
8см
B

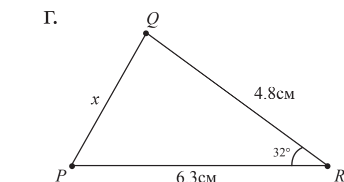
Косинус нь $\frac{1}{2}$ байх өнцөг $\beta = 60°$ $(\cos 60° = \frac{1}{2})$. Мөн тригонометр функцтэй тооны машин хэрэглэн $\beta = 60^0$ болохыг гаргаж болно.

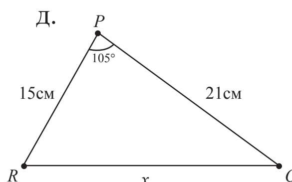
9. Гурвалжны нэг талын урт x-ийг ол.

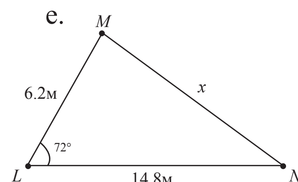
а.


б.


в.


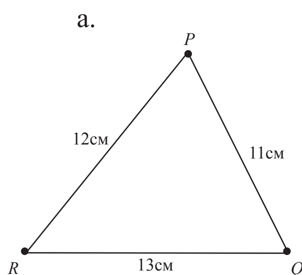
г.


д.


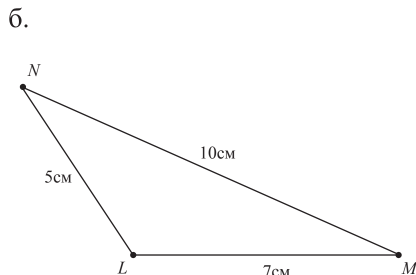
е.


10. Зурагт өгсөн гурвалжны бүх өнцгийг ол.

а.

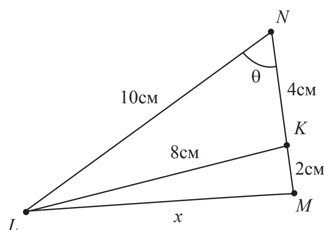


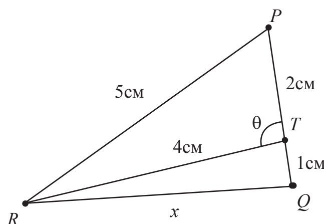
б.

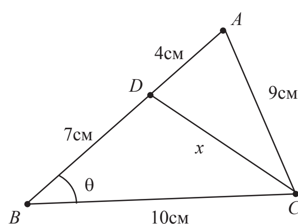


11. а) 11 см, 13 см, 17 см талтай гурвалжны хамгийн бага өнцгийг ол.
б) 4 см, 7 см, 9 см талтай гурвалжны хамгийн их өнцгийг ол.

12. Доорх зургийн хувьд а) $cos\theta$ =? б) x=?

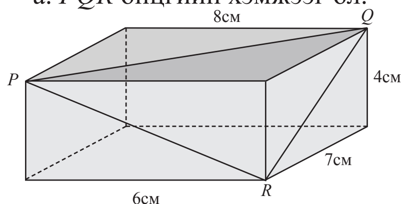




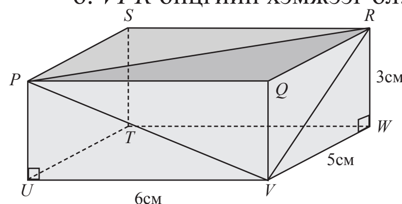


13. Зурагт үзүүлсэн тэгш өнцөгт параллелепипедийн заасан өнцгийн хэмжээг ол.

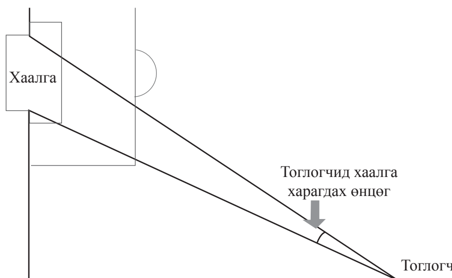
а. PQR өнцгийн хэмжээг ол.

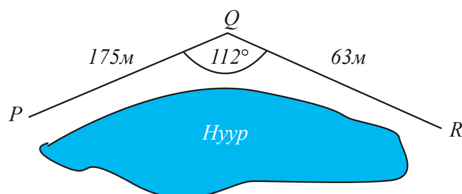


б. VPR өнцгийн хэмжээг ол.



14. Хөл бөмбөгийн хаалга 5 м өргөн, хаалганы нэг шонгоос 21 м, нөгөө шонгоос 19 м зайд байгаа тоглогч хаалга руу бөмбөг өшиглөв. Тоглогчид хаалга ямар өнцгөөр харагдаж байсан бэ?

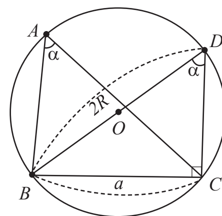




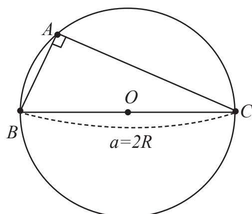
15. Цэцэрлэгт хүрээлэнгийн ажилтан P цэгээс R цэгт очихын тулд зурагт үзүүлсэн шиг P цэгээс Q цэгээр дайраад, R цэгт очдог байв. P цэгээс R хүртэлх шулуун замаар явах зай нь хэдэн метр вэ?

Синусын теорем

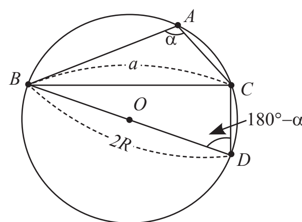
ABC гурвалжны $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $\angle BAC=\alpha$, $\angle ABC=\beta$ ба $\angle BCA=\gamma$ гэж өгсөн байг.



A өнцөг хурц үед BD диаметрийг татъя. Тэгвэл ижил нумд тулсан өнцгүүд тэнцүү тул $\angle BAC=\angle BDC$. BD диаметр тул $\angle BDC=90°$. BDC тэгш өнцөгт гурвалжин учир $\sin\alpha=\dfrac{a}{2R}$ тул $2R=\dfrac{a}{\sin\alpha}$ болно.



A өнцөг $90°$ үед BC нь диаметр болох тул $2R=a$. Мөн $\sin 90°=1$ тул $2R=\dfrac{a}{\sin 90°}$ болно.



A өнцөг мохоо үед BD диаметрийг татъя. Тэгвэл багтсан дөрвөн өнцөгтийн чанараар $\angle BDC=180°-\alpha$ болно. $\sin\alpha=\sin\left(180°-\alpha\right)$ тул BDC тэгш өнцөгт гурвалжны хувьд $\sin\left(180°-\alpha\right)=\dfrac{a}{2R}$ буюу $2R=\dfrac{a}{\sin\alpha}$ болно.

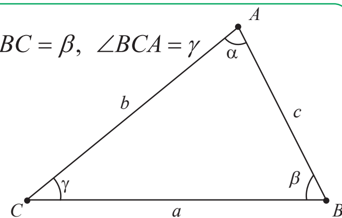
Ийнхүү ямар ч гурвалжны хувьд $\dfrac{a}{\sin\alpha}=2R$ боллоо.

Үүнтэй адилаар бусад талын хувьд $\dfrac{b}{\sin\beta}=2R$, $\dfrac{c}{\sin\gamma}=2R$ гэдгийг харуулж болно.

Синусын теорем. $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $\angle CAB=\alpha$, $\angle ABC=\beta$, $\angle BCA=\gamma$ байх аливаа ABC гурвалжны хувьд

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

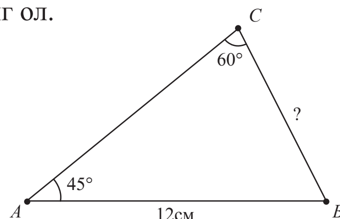
байна.



Жишээ 10. Зурагт өгсөн ABC гурвалжны BC талын уртыг ол.
Бодолт. Синусын теоремоор

$$\frac{BC}{\sin 45°}=\frac{12}{\sin 60°}$$ тул

$$BC=\frac{12\sin 45°}{\sin 60°}=\frac{12\cdot\sqrt{2}/2}{\sqrt{3}/2}=\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=4\sqrt{6}$$ болно.



Жишээ 11. Зурагт өгсөн KMN гурвалжны K ба N оройн өнцгүүдийн хэмжээг ол.
Бодолт. $\angle MNK=\theta$ гэе. Синусын теоремоор

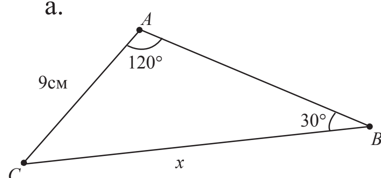
$\dfrac{6.7}{\sin\theta}=\dfrac{8.4}{\sin 71°}$ тул $\sin 71° = 0.945518\ldots$ гэсэн утгыг тооны машинаар бодож гаргана. Дараа нь таван орноор ойролцоолж авбал

$$\sin\theta = \frac{6.7\cdot\sin 71°}{8.4} = \frac{6.7\cdot 0.94552}{8.4} = 0.7541647619$$

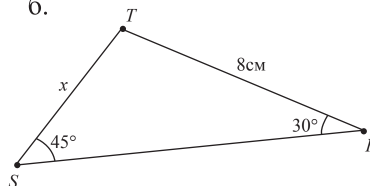
гэж гарна. Тооны машинаар хоёр орноор тоймловол $\theta \approx 48.95°$. Иймд K оройн өнцгийн хэмжээ $\angle MKN = 180° - 71° - 48.95° = 60.05°$ болно.

16. Гурвалжны нэг талын урт x-ийг ол.

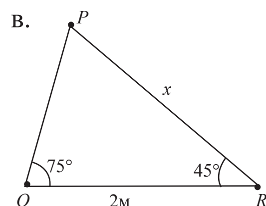
а.



б.

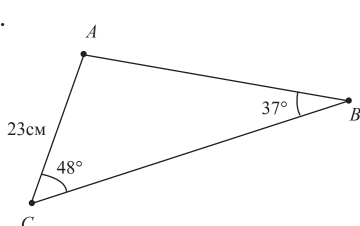


в.

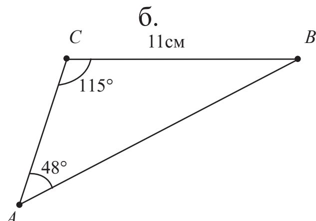


17. Гурвалжны AB талын уртыг цэгээс хойш хоёр орноор ойролцоолж ол.

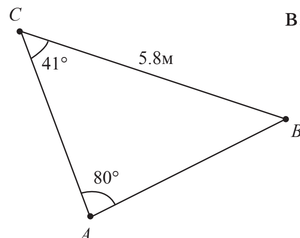
а.



б.



в.



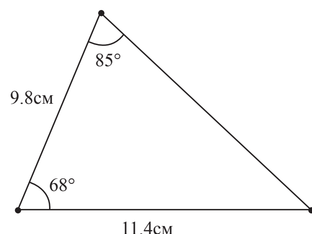
18. ABC гурвалжны өнцгийн хэмжээг ол.

а) Хэрэв a=14.6 см, b=14.6 см ба $\angle ABC = 65°$ бол $\angle BAC = ?$

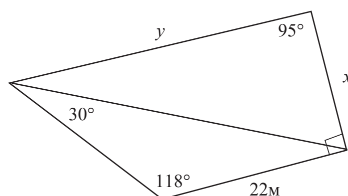
б) Хэрэв b=43.8 см, c=31.4 см ба $\angle ACB = 43°$ бол $\angle ABC = ?$

в) Хэрэв a=6.5 см, c=4.8 см ба $\angle BAC = 71°$ бол $\angle BCA = ?$.

19. Гурвалжны өнцөг талын хэмжээ зөв үү?

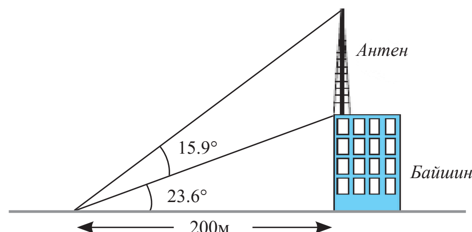


20. Зурагт өгсөн x, y -ийн утгыг ол.



21. ABC гурвалжны $\angle ABC = 40°$, $AC = 8$ см ба AB=11см гэж өгсөн байг. $\angle ACB$ өнцгийн хувьд боломжит хоёр хэмжээг ол.

22. Зурагт үзүүлсэн шиг байшин дээр



мэдээлэл холбооны антен барьжээ. Антены өндрийг ол.

23. Гурвалжны талын урт a, b, c. Гурвалжны c урттай талд буулгасан өндрийн уртыг ол.

24. Параллелограммын диагоналийн урт c ба d, эдгээрийн хоорондох өнцөг нь α гэж өгчээ. Параллелограммын талыг ол.

25. Параллелограммын талын урт a ба b, тэдгээрийн хоорондох өнцөг нь α гэж өгчээ. Параллелограммын диагоналийн уртыг ол.

26. Гурвалжны хоёр талын урт 20 м, 21м. Хэрэв эдгээр талын хоорондох өнцгийн синус 0.6 бол гурав дахь талыг ол.

27. Гурвалжны талын урт 13 м, 14 м, 15 м байв. Гурвалжны өнцгүүдийн косинусыг ол.

28. Гурвалжны талын урт a, b, c. Эдгээр талуудад татсан m_a, m_b, m_c медианы уртыг ол.

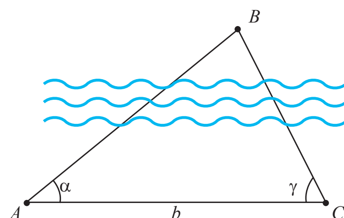
29. Өгсөн хоёр цэг хүртэлх зайн квадратын нийлбэр тогтмол байх цэгийн геометр байр нь өгсөн цэгүүдийг холбосон хэрчмийн дундаж цэгт төвтэй тойрог болно гэдгийг харуул.

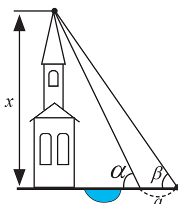
30. Гурвалжны өнцгийн биссектрис эсрэг орших талаа налсан талуудтай пропорционал хэрчмүүд болгон хуваана гэдгийг харуул.

31. Хэрэв гурвалжны хоёр тал 5 см, 6 см бол 5 см талын эсрэг орших өнцөг мохоо байж болох уу?

32. ABC гурвалжинд $c = 15$ см, $b = 10$ см бол $\sin\beta = \frac{3}{4}$ байж болох уу?

33. Зурагт A, C цэгүүд голын наана, B цэг голын цаана байгаа нь дүрслэгджээ. $AC=b$ болон $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$ мэдэгдсэнээр A цэгээс B цэг хүртэлх зайг гол гатлалтгүй олох аргыг тайлбарла.





34. α, β өнцөг, a зайг ашиглаж барилгын өндөр x-ийг хэрхэн олохыг тайлбарла.

35. ABC гурвалжны C оройгоос CD биссектрис татжээ. AC тал BC талаас урт бол AD, BD хоёр хэрчмийн аль нь урт вэ?

36. Хэрэв ABC гурвалжны $\angle A = 40°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 80°$ бол түүний аль тал хамгийн их, аль тал хамгийн бага вэ?

37. Хэрэв ABC гурвалжинд $AB = 5.1$м, $BC = 6.2$ м, $AC = 7.3$ м бол түүний аль өнцөг хамгийн их, аль өнцөг хамгийн бага вэ?

38. Хэрэв адил хажуут гурвалжны суурийн өнцөг 60°-аас их бол суурь, хажуу тал хоёрын аль нь урт вэ?

39. ABC гурвалжны C өнцөг мохоо. Хэрэв X цэг AC тал дээр оршиж байгаа бол $BX < AB$ болохыг батал.

40. ABC гурвалжны C өнцөг мохоо. Хэрэв X цэг AC тал дээр, Y цэг BC тал дээр оршиж байгаа бол $XY < AB$ болохыг батал.

41. ABC гурвалжин өгчээ. CD нь AB талд татсан медиан болог. Хэрэв $AC > BC$ бол $\angle ACD < \angle BCD$ болохыг харуул.

42. Гурвалжны нэг оройгоос татсан биссектрис, өндөр, медиан гурвын хувьд

биссектрис нь өндрөөсөө багагүй, медианаасаа уртгүй болохыг харуул.

43. Гурвалжны нэг тал, хоёр өнцөг өгчээ. Гурав дахь өнцөг, нөгөө хоёр талыг олоорой. Үүнд:

1. $a=5,\quad \beta=30°,\quad \gamma=45°$
2. $a=20,\quad \alpha=75°,\quad \beta=60°$
3. $a=35,\quad \beta=40°,\quad \gamma=120°$
4. $b=12,\quad \alpha=36°,\quad \beta=25°$
5. $c=14,\quad \alpha=64°,\quad \beta=48°$

44. Хоёр тал, гурав дахь талын эсрэг орших өнцөг өгчээ. Бусад хоёр өнцөг, гурав дахь талыг ол. Үүнд:

1. $a=12,\quad b=8,\quad \gamma=60°$
2. $a=7,\quad b=23,\quad \gamma=130°$
3. $b=9,\quad c=17,\quad \alpha=95°$
4. $b=14,\quad c=10,\quad \beta=145°$
5. $a=32,\quad c=23,\quad \beta=152°$
6. $a=24,\quad c=18\quad \beta=15°$

45. Гурвалжны *a, b* хоёр тал, *a* талын эсрэг орших α өнцөг өгчээ. Гурвалжны бусад өнцөг, талыг ол.

1. $a=12,\quad b=5,\quad \alpha=120°$
2. $a=27,\quad b=9,\quad \alpha=138°$
3. $a=34,\quad b=12,\quad \alpha=164°$
4. $a=2,\quad b=4,\quad \alpha=60°$
5. $a=6,\quad b=8,\quad \alpha=30°$

46. Гурвалжны гурван тал өгчээ. Түүний өнцгүүдийг ол.

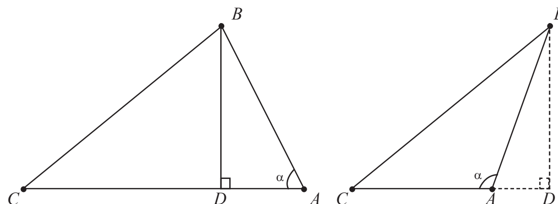
1. $a=2,\quad b=3,\quad c=4$
2. $a=7,\quad b=2,\quad c=8$
3. $a=4,\quad b=5,\quad c=7$
4. $a=15,\quad b=24,\quad c=18$
5. $a=23,\quad b=17,\quad c=39$
6. $a=55,\quad b=21,\quad c=38$

8.3. ГУРВАЛЖНЫ ТАЛБАЙ

Бид өмнө гурвалжны талбай түүний талын уртыг тэр талд татсан өндрийн уртаар үржүүлсэн үржвэрийн хагастай тэнцүү гэдгийг судалсан.

Жишээ 1. *ABC* гурвалжны талбайн хувьд $S=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin\alpha$ томьёо хүчинтэй болохыг харуул.

Бодолт. *ABC* гурвалжинд *BD* өндөр татъя. $S=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD$ болно. Тэгш өнцөгт



ABD гурвалжнаас, хэрэв α өнцөг хурц бол $BD=AB\cdot\sin\alpha$, хэрэв α өнцөг мохоо бол $BD=AB\cdot\sin(180°-\alpha)$ гэж олно. $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$ учраас аль ч тохиолдолд $BD=AB\cdot\sin\alpha$ болно. Иймээс гурвалжны талбай $S=\frac{1}{2}AC\cdot AB\cdot\sin\alpha$ болно.

ABC гурвалжны $AB = c,\ AC = b,\ BC = a,\ \angle BAC = \alpha,\ \angle ABC = \beta,\ \angle ACB = \gamma$, гурвалжны талбай *S* бол $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ca\sin\beta$ байна.

Жишээ 2. Гурвалжны талбайн хувьд $S=\sqrt{p\ \ p-a)(p-b)(p-c)}$ Героны томьёо гарга. Энд *a, b, c* нь гурвалжны талын урт, *p* нь гурвалжны хагас периметр.

Бодолт. γ нь гурвалжны *c* талын эсрэг орших өнцөг бол $S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\gamma$ болно. Косинусын теорем ёсоор $c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma$ байна. Эндээс $\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

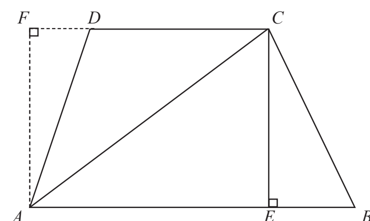
буюу $\sin^2\gamma=1-\cos^2\gamma=(1-\cos\gamma)(1+\cos\gamma)=\left(1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)=$

$$=\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2ab}\cdot\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{c^2-(a-b)^2}{2ab}\cdot\frac{(a+b)^2-c^2}{2ab}=$$

$$=\frac{1}{4a^2b^2}\cdot(c-a+b)\cdot(c+a-b)\cdot(a+b-c)\cdot(a+b+c)$$ болно.

Энд $a+b+c=2p,\ a+b-c=2p-2c,\ c+a-b=2p-2b,\ c-a+b=2p-2a$ гэдгийг тооцвол $\sin\gamma=\frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ болно.

Эндээс $S=\frac{1}{2}\cdot ab\cdot\sin\gamma=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ боллоо.



Трапецын талбайг олъё. Өгсөн *ABCD* трапецын *AC* диагональ түүнийг *ABC, CDA* гэсэн хоёр гурвалжин болгон хуваана.

Иймээс трапецын талбай энэ хоёр гурвалжны талбайн нийлбэртэй тэнцүү. *A*-аас *DC* шулуунд *AF* өндөр, *C*-ээс *AB* шулуунд *CE* өндөр тус тус буулгая. $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CE,\ S_{ACD}=\frac{1}{2}CD\cdot AF$ байна. *AFCE* тэгш өнцөгт болно. Иймд *CE* = *AF* бөгөөд *AB, CD* параллел шулуунуудын хоорондох зай болно. Энэ зайг **трапецын өндрийн урт** гэнэ.

Эндээс $S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ACD}=\frac{(AB+CD)}{2}\cdot CE$ болно.

Чанар. Трапецын талбай түүний сууриудын уртын нийлбэрийн хагасыг өндрийн уртаар үржүүлсэн үржвэртэй тэнцүү байна.

Жишээ 3. Гурвалжны талын урт *a, b, c* байг. Уг гурвалжныг багтаасан тойргийн радиус *R* бол $R=\frac{abc}{4S}$ байхыг харуул. Энд *S* нь уг гурвалжны талбай.

Бодолт. Хэрэв гурвалжны *a* талын эсрэг орших өнцөг α бол $R=\frac{a}{2\sin\alpha}$ болохыг бид

мэднэ. Энэ тэнцэтгэлийн баруун талын хүртвэр, хуваарийг bc- ээр үржүүлж, $\frac{1}{2} \cdot bc \cdot \sin\alpha = S$ болохыг санавал $R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{a \cdot bc}{2 \cdot bc \cdot \sin\alpha} = \frac{abc}{4S}$ болно.

47. Тэгш өнцөгт гурвалжны катетууд дээр байгуулсан тэдгээрээр талаа хийсэн квадратуудын талбайн нийлбэр гипотенуз дээр байгуулсан гипотенузаар талаа хийсэн квадратын талбайтай тэнцүү гэж батал.

48. Квадрат хэлбэртэй хоёр хэсэг газрын талын урт 100 м, 150 м. Эдгээртэй хэм чацуу, квадрат хэлбэрийн газрын талыг ол.

49. Квадратын диагоналийн урт a бол түүний талбайг ол.

50. Тойрог багтаасан квадратын талбай, энэ тойрогт багтсан квадратын талбайгаас хэд дахин их вэ?

51. Хэрэв квадратын тал тус бүрийг 3 дахин ихэсгэвэл түүний талбай хэрхэн өөрчлөгдөх вэ?

52. Квадратын талбай 25 дахин багассан байхын тулд квадратын талуудыг хэд дахин багасгах вэ?

53. Хэрэв тэгш өнцөгтийн хоёр талын харьцаа 4:9, түүний талбай 144 $м^2$ бол тэгш өнцөгтийн талуудыг ол.

54. Хэрэв тэгш өнцөгтийн периметр 74 дм, талбай 3$м^2$ бол тэгш өнцөгтийн талуудыг ол.

55. Тэгш өнцөгт, параллелограмм хоёул ижилхэн талуудтай. Хэрэв параллелограммын талбай тэгш өнцөгтийн талбайн хагастай тэнцүү бол параллелограммын хурц өнцгийг ол.

56. Квадрат, ромбо хоёул ижилхэн периметртэй. Аль дүрс их талбайтай вэ? Хариултаа тайлбарла.

57. Хэрэв ромбын өндөр 10 см, хурц өнцөг нь 30° бол түүний талбайг ол.

58. Хэрэв ромбын өндөр 12 см, бага диагональ 13 см бол түүний талбайг ол.

59. Ромбын талбай нь түүний 2 диагоналийн үржвэрийн хагастай тэнцүү болохыг харуул.

60. Ромбын хоёр диагоналийн харьцаа 1:2 ба түүний талбай 12 $см^2$-тай тэнцүү. Ромбын талыг ол.

61. Хэрэв гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн диагоналиуд перпендикуляр бол түүний талбай диагоналиудын үржвэрийн хагастай тэнцүүг харуул.

62. Өгсөн гурвалжныг нэг оройг дайрсан шулуунуудаар тэнцүү талбайтай гурван хэсэг болгон хуваа.

63. Хэрэв адил хажуут гурвалжны суурь 120 м, хажуу тал 100 м бол түүний талбай хэдтэй тэнцүү вэ?

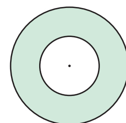
64. a гипотенузтай, адил хажуут тэгш өнцөгт гурвалжны талбайг ол.

65. 8 см, 4 см талтай гурвалжны тал бүрд өндөр татжээ. Хэрэв 8 см урттай талд татсан өндөр 3 см бол 4 см урттай талд татсан өндөр хэд вэ?

66. Гурвалжны талууд өндрүүдтэйгээ урвуу пропорционал, өөрөөр хэлбэл $a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}$ болохыг харуул.

67. a талтай адил талт гурвалжны талбайг ол.
68. R радиустай дугуйд багтсан зөв гурвалжны талбайг ол.
69. Хэрэв тэгш өнцөгт гурвалжны өндөр гипотенузаа 32 см, 18 см хэрчмүүдэд хуваасан бол түүний талбайг ол.
70. Хэрэв тэгш өнцөгт гурвалжны гипотенуз 73 см, талбай 1320 см^2 бол түүний катетуудыг ол.
71. ABC гурвалжны талын урт $AC = b$, $BC = a$ болно. C өнцөг ямар хэмжээтэй байхад гурвалжин хамгийн их талбайтай байх вэ?
72. Адил хажуут гурвалжны хажуу талууд 1 м, эдгээрийн хоорондох өнцөг 70° бол түүний талбайг ол.
73. Хэрэв параллелограммын талууд 2 м, 3 м, нэг өнцөг нь 70° бол түүний талбайг ол.
74. a тал, түүнд налсан β, γ өнцгөөр гурвалжны талбайг ол.
75. Параллелограммын талбай диагоналиудын үржвэрийн хагасыг тэдгээрийн хоорондох өнцгийн синусээр үржүүлсэнтэй тэнцүү болохыг харуул.
76. Өгсөн диагоналиудтай бүх параллелограмм дотроос хамгийн их талбайтай нь ромбо болохыг харуул.

77. Гурван талаар нь гурвалжны талбайг ол. Үүнд: 1) 13, 14, 15; 2) 5, 5, 6; 3) 17, 65, 80; 4) $\frac{25}{6}$, $\frac{29}{6}$, 6; 5) 13, $37\frac{12}{13}$, $47\frac{1}{12}$; 6) $2\frac{1}{12}$, $3\frac{44}{75}$, 1.83.
78. Гурван талаар нь гурвалжны хамгийн бага өндрийг ол. Үүнд: 1) 13, 14, 15; 2) 5, 5, 6; 3) 17, 65, 80.
79. Гурван талаар нь гурвалжны хамгийн их өндрийг ол. Үүнд:
1) $\frac{25}{6}$, $\frac{29}{6}$, 6 ; 2) 13, $37\frac{12}{13}$, $47\frac{1}{12}$; 3) $2\frac{1}{12}$, $3\frac{44}{75}$, 1.83.
80. Гурвалжны гурван тал өгсөн үед уг гурвалжныг багтаасан тойргийн радиус R, уг гурвалжинд багтсан тойргийн радиус r-ийг ол. Үүнд: 1) 13, 14, 15; 2) 15, 13, 4; 3) 35, 29, 8; 4) 4, 5, 7.
81. Адил хажуут гурвалжны хажуу тал 6 см, суурьд татсан өндөр 4 см. Багтаасан тойргийн радиусыг ол.
82. Тэгш өнцөгт гурвалжны хувьд багтсан тойргийн радиус катетуудын нийлбэрээс гипотенузыг хассаны хагастай тэнцүү болохыг батал.
83. Тэгш өнцөгт гурвалжны катетууд 40 см, 42 см. Багтаасан тойргийн радиусыг ол.
84. Трапецын параллел талууд 60 см, 20 см, параллел биш талууд 13 см, 47 см байна. Түүний талбайг ол.
85. Адил хажуут трапецын их суурь 44 м, хажуу тал 17 м, диагональ 39 м болно. Трапецын талбайг ол.
86. Нэг ижил төвтэй 1) 4 см, 6 см 2) 5.5 м, 6.5 м 3) a, b $(a > b)$ радиустай хоёр тойргийн хооронд хашигдсан дугуй цагаригийн талбайг ол.



IX БҮЛЭГ. ХАВТГАЙ ДЭЭРХ ВЕКТОР

Энэ бүлэг сэдвийг судалснаар дараах мэдлэг, чадваруудыг эзэмшинэ.

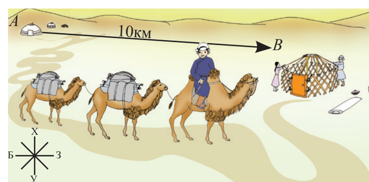
- *Векторыг чиглэлтэй хэрчмээр дүрслэх, тэмдэглэх, векторын урт ба чиглэл, тэнцүү болон эсрэг векторыг мэдэх, параллел векторыг таних*
- *Векторын нэмэх, хасах, тоогоор үржүүлэх үйлдэл*
- *Векторыг өгсөн хоёр шулууны дагуу векторуудын нийлбэр болгох*
- *Координатын хавтгай дээрх вектор, түүний координатыг тодорхойлох, тэмдэглэх*
- *Суурь вектор, векторыг суурь вектороор илэрхийлэх, векторын уртыг координатаар олох, координат ашиглан векторын нэмэх, хасах, тоогоор үржүүлэх үйлдлийг гүйцэтгэх*
- *Хоёр векторын хоорондох өнцгийг мэдэх, скаляр үржвэр, скаляр үржвэрийг координатаар илэрхийлэх*
- *Хоёр вектор параллел, перпендикуляр байх нөхцөлийг ойлгох, хэрэглэх*

9.1. ВЕКТОР, ТҮҮН ДЭЭР ХИЙХ ҮЙЛДЭЛ

Хавтгай дээрх вектор

Айл аль чиглэлд, ямар зайд нүүдэл хийсэн бэ?

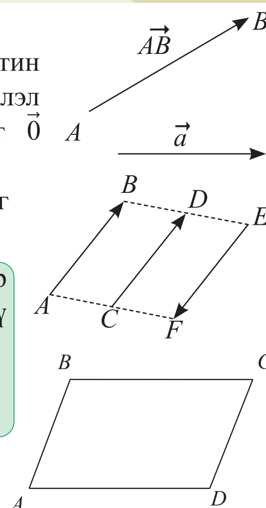
Айл зүүн урд зүгт 10 км нүүсэн байна. Энэ нүүдлийг бид A цэгт эхлэлтэй B цэгт төгсгөлтэй, чиглэлтэй хэрчмээр төсөөлөн дүрсэлж болох юм.



Тодорхойлолт. Хавтгайн чиглэлтэй хэрчмийг **вектор** гэнэ.

Векторыг эхлэл, төгсгөлийн цэгээр $\overrightarrow{AB}$ гэж тэмдэглэнэ. Мөн латин цагаан толгойн жижиг үсгээр $\vec{a}, \vec{b}, \ldots$ гэх мэт тэмдэглэдэг. Эхлэл төгсгөл нь давхацсан векторыг **тэг вектор** гэнэ. Тэг векторыг $\vec{0}$ эсвэл $\overrightarrow{AA}$ гэж тэмдэглэдэг.

Векторыг тодорхойлж буй хэрчмийн уртыг векторын урт гэдэг бөгөөд $|\overrightarrow{AB}|$ эсвэл $|\vec{a}|$ гэж тэмдэглэнэ.



Тодорхойлолт. Нэг шулуун дээр эсвэл параллел шулуунууд дээр орших, ижил чиглэлтэй, тэнцүү урттай $\vec{a}, \vec{b}$ векторуудыг **тэнцүү векторууд** гээд $\vec{a} = \vec{b}$ гэж тэмдэглэнэ. Харин урт нь тэнцүү боловч чиглэл нь эсрэг $\vec{a}, \vec{b}$ векторуудыг **эсрэг векторууд** гээд $\vec{a} = -\vec{b}$ гэж тэмдэглэнэ.

Жишээ 1. Зурагт $ABCD$ параллелограмм өгчээ. Дараах хос вектор ямар хамааралтай болохыг тогтоо.

а. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ б. $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA}$

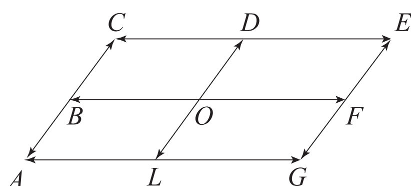
Бодолт. Параллелограммын хувьд эсрэг талууд нь параллел бөгөөд тэнцүү байдаг. Иймд

а. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ хоёр векторын урт нь тэнцүү, чиглэл нь ижил тул тэнцүү векторууд байна ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$).

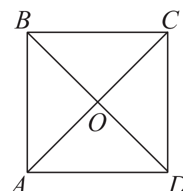
б. $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA}$ хоёр векторын урт нь тэнцүү боловч чиглэл нь эсрэг тул эсрэг векторууд байна ($\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA}$).

Тодорхойлолтоос аливаа векторыг параллелээр зөөхөд үргэлж тэнцүү вектор гарна.

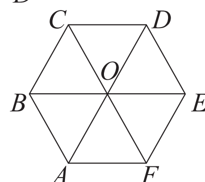
1. Зурагт өгсөн параллелограммын хувьд тэнцүү эсвэл эсрэг хос векторыг олж, тэмдэглэ.



2. Хэрэв $ABCD$ квадратын диагоналиудын огтлолцлын цэг O бол тэнцүү эсвэл эсрэг хос векторыг ол.

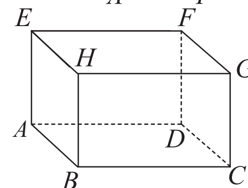


3. Зөв зургаан өнцөгт өгөв. $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{BC}$ вектор тус бүртэй тэнцүү эсвэл эсрэг векторыг ол.



4. Зурагт өгсөн параллелепипедийн хувьд өгсөн вектортой тэнцүү эсвэл эсрэг векторыг олж тэмдэглэ.

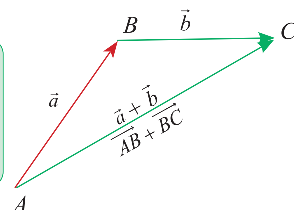
а. $\overrightarrow{FG}$ б. $\overrightarrow{FD}$ в. $\overrightarrow{GH}$
г. $\overrightarrow{AB}$ д. $\overrightarrow{BA}$ е. $\overrightarrow{DC}$
ё. $\overrightarrow{DC}$ ж. $\overrightarrow{CG}$ з. $\overrightarrow{FE}$



Энэхүү вектор гэж нэрлэгдэх чиглэлтэй хэрчмүүдийн хувьд нэмэх, хасах, тоогоор үржүүлэх үйлдлийг тодорхойлож болдог.

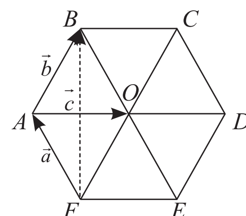
Векторын нэмэх үйлдэл

Тодорхойлолт. $\vec{a}$ векторын төгсгөл дээр эхтэй $\vec{b}$ вектортой тэнцүү вектор өгсөн байг. Тэгвэл $\vec{a}$ векторын эх дээр эхлэлтэй, $\vec{b}$ векторын төгсгөл дээр төгсгөлтэй векторыг $\vec{a}$, $\vec{b}$ хоёр **векторын нийлбэр** вектор гээд $\vec{a}+\vec{b}$ гэж тэмдэглэнэ.



Үүнийг хоёр векторыг нэмэх **гурвалжны дүрэм** гэдэг.
Тодорхойлолтоос хавтгайн аливаа A, B, C гурван цэгийн хувьд $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ байна.

Жишээ 1. $ABCDEF$ зөв зургаан өнцөгт, диагоналиудын огтлолцлын цэг O болон $\overrightarrow{FA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AO}=\vec{c}$ вектор өгчээ. Дараах векторыг өгсөн вектороор илэрхийл.

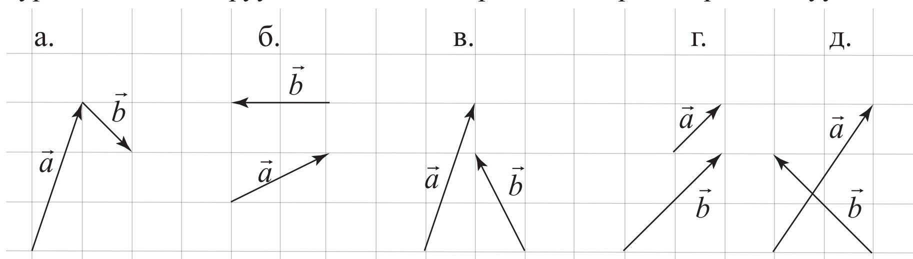


а. $\overrightarrow{FB}$ б. $\overrightarrow{FO}$ в. $\overrightarrow{FC}$ г. $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OF}$

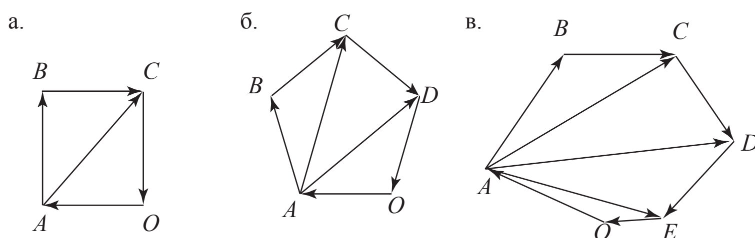
Бодолт. а. Гурвалжны дүрмээр $\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\vec{b}$ байна.
б. Гурвалжны дүрмээр $\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AO}=\vec{a}+\vec{c}$ байна.
в. $\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BC}$ ба $\overrightarrow{FB}=\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}=\vec{c}$ байна. Иймд $\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ болно. Энэ бодлогыг мөн $\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{OC}=\vec{b}$ тул $\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{OC}=\vec{b}+\vec{b}=2\vec{b}$ гэж бодож болно.
г. $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{FO}$ болох ба $\overrightarrow{FO}=-\overrightarrow{OF}$ тул $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{FO}+\left(-\overrightarrow{OF}\right)=\vec{0}$ байна.

5. Хэрэв $ABCD$ параллелограммын хувьд $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ гэж өгсөн бол $\overrightarrow{AC}$ векторыг $\vec{a},\vec{b}$ вектороор илэрхийл.

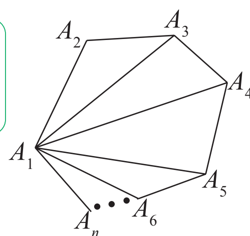
6. Зурагт $\vec{a}$ ба $\vec{b}$ векторууд өгчээ. $\vec{a},\vec{b}$ векторын нийлбэр векторыг байгуул.



7. $\overrightarrow{AO}$ векторыг бусад вектороор илэрхийл.



Чанар 1. Хавтгайн дурын $A_1, A_2, \ldots, A_n$ цэгүүдийн хувьд $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}$ байна. Үүнийг векторыг нэмэх **олон өнцөгтийн дүрэм** гэнэ.



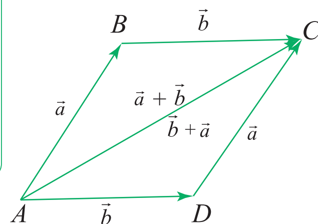
Жишээ 2. Хэрэв ерөнхий эхтэй $\vec{a}$, $\vec{b}$ хоёр вектор өгсөн бол тэдгээрийг хэрхэн нэмэх вэ?

Бодолт. Зурагт үзүүлснээр $ABCD$ параллелограмм байгуулна. Векторыг нэмэх гурвалжны дүрмээр $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ болно. Ерөнхий эхтэй $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторын нийлбэрийг параллелограмм байгуулж нэмэх энэхүү аргыг **параллелограммын дүрэм** гэнэ.

Векторын нэмэх үйлдлийн хувьд дараах чанар биелнэ.

Чанар 2.

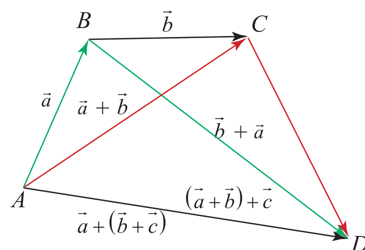
1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (байр солих)
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (бүлэглэх)
3. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}$ байх $\vec{b}$ вектор цор ганц олдох ба түүнийг тэг вектор гээд $\vec{0}$ гэж тэмдэглэнэ.
4. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$ байх $\vec{b}$ векторыг $\vec{a}$ векторын эсрэг вектор гэдэг.



Баталгаа. 1. Байр солих чанар нь векторыг нэмэх параллелограммын дүрмээс харагдаж байна.

2. Бүлэглэх чанарыг батлахын тулд дурын A цэгээс $\vec{a}$ вектортой тэнцүү $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, B цэгээс

$\vec{b}$ вектортой тэнцүү $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, C цэгээс $\vec{c}$ вектортой тэнцүү $\vec{c}=\overrightarrow{CD}$ вектор байгуулъя. Гурвалжны дүрмээр:



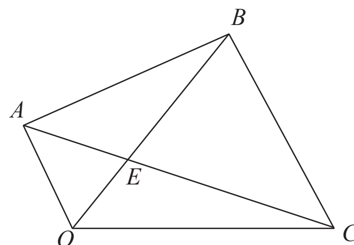
$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$$

$$\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$$

Иймд $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ байна.

Жишээ 3. Зурагт өгсөн дөрвөн өнцөгтийн хувьд дараах векторуудын нийлбэр вектор байгуул.

а. $\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EB}$ б. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}$ в. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}$



Бодолт. а. $\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{OB}$

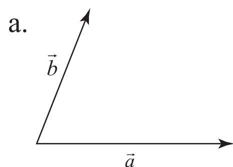
б. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}$

в. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AC}$ болох тул

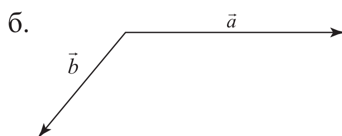
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AC}$ байна.

8. Зурагт $\vec{a}$, $\vec{b}$ хоёр вектор өгчээ. $\vec{a}$, $\vec{b}$ хоёр векторын нийлбэрийг векторыг нэмэх параллелограммын дүрмээр ол.

а.



б.



Векторын хасах үйлдэл

Тодорхойлолт. $\vec{b}$ вектор дээр $\vec{a}$ векторын эсрэг векторыг нэмэхэд гарах векторыг $\vec{b}$ ба $\vec{a}$ векторын ялгавар вектор гээд $\vec{b}-\vec{a}$ гэж тэмдэглэнэ.

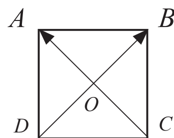
Нэг цэгээс эхлэлтэй $\vec{a}$ ба $\vec{b}$ векторуудын хувьд $\vec{b}-\vec{a}$ нь ямар вектор гарахыг зурагт үзүүлэв.

B
$\vec{x}=\vec{b}-\vec{a}$
$\vec{a}$
C
A
$\vec{b}$

Санамж Хоёр векторыг нэмэх, хасахад тэдгээрийн эхлэл, төгсгөлийн цэг болон гарах векторын эхлэл төгсгөлийн цэг хоорондоо хэрхэн хамаарч байгааг доорх бичлэгээс ажиглаарай.

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC} \qquad \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$$

Жишээ 4. Зурагт үзүүлсэн квадратын хувьд $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$ векторуудыг $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ векторыг ашиглан ол.

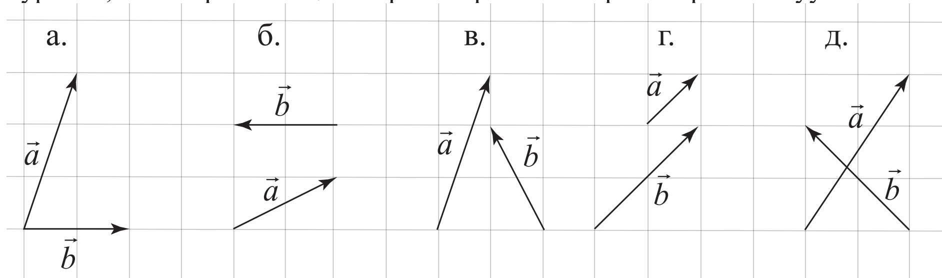


Бодолт. Тодорхойлолт ёсоор $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$ болно.

Чанар 3. $\vec{a}$ ба $\vec{b}$ векторууд нь ижил чиглэлтэй векторууд бол $\vec{a}+\vec{b}$ нь тэдгээртэй ижил чиглэлтэй бөгөөд урт нь тэдгээрийн уртуудын нийлбэртэй тэнцүү байна. Өөрөөр хэлбэл $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$ байна.

Баталгаа. $\vec{a}$ векторын төгсгөл дээр $\vec{b}$ векторын эхлэлийг давхцуулбал $\vec{a}+\vec{b}$ нь $\vec{a}$ векторын эхлэл дээр эхтэй $\vec{b}$ векторын төгсгөл дээр төгсгөлтэй вектор болно. $\vec{a}$ векторын эхлэл цэг, төгсгөл цэг, $\vec{b}$ векторын төгсгөл цэгүүд нь нэг шулуун дээр орших тул $\vec{a}+\vec{b}$ нь $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторуудтай ижил чиглэлтэй байх бөгөөд $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$ байна.

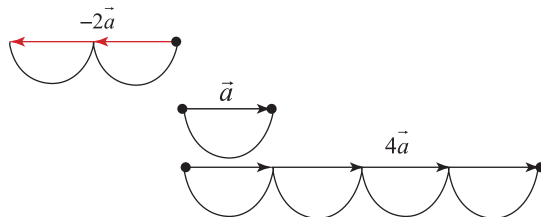
9. Зурагт $\vec{a}$, $\vec{b}$ вектор өгчээ. $\vec{a},\vec{b}$ хоёр векторын ялгавар векторыг байгуул.



Векторыг тоогоор үржүүлэх үйлдэл

Жишээ 5. Ямар нэгэн $\vec{a}$ вектор авч дараах нийлбэрийг олъё.

а. $\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}$ б. $(-\vec{a})+(-\vec{a})$

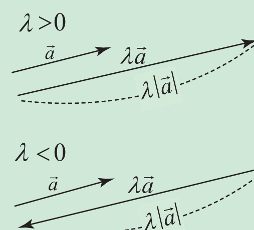


Бодолт. а. $\vec{a}\neq\vec{0}$ байх $\vec{a}$ векторыг 4 удаа нэмж үзэхэд $|\vec{a}|$ уртаас 4 дахин их урттай $\vec{a}$ вектортой ижил чиглэлтэй вектор гарлаа.

б. $(-\vec{a})+(-\vec{a})$ вектор нь $|\vec{a}|$-аас 2 дахин их урттай, $\vec{a}$ вектортой эсрэг чиглэлтэй вектор гарлаа.

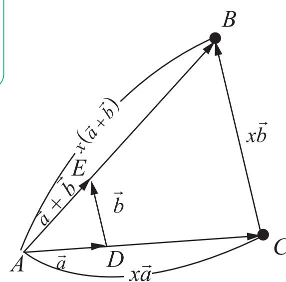
Тодорхойлолт. $\vec{a}\neq\vec{0}$ ба λ дурын бодит тоо байг. λ тоогоор $\vec{a}$ векторыг үржүүлэхэд вектор гарах ба $\lambda\vec{a}$ гэж тэмдэглэнэ. Уг вектор нь:

1. $\lambda>0$ үед $\vec{a}$ вектортой ижил чиглэлтэй, урт нь $\lambda|\vec{a}|$ байх вектор байна. $\lambda=1$ үед $1\vec{a}=\vec{a}$ болно.
2. $\lambda<0$ үед $\vec{a}$ вектортой эсрэг чиглэлтэй, урт нь $-\lambda|\vec{a}|$ байх вектор байна. $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$
3. $\lambda=0$ үед $\vec{0}$ вектор байна. $0\vec{a}=\vec{0}$



Чанар 4.
Дурын $\vec{a}$ ба $\vec{b}$ векторууд болон *x, y* бодит тоонуудын хувьд:
1. $(xy)\vec{a}=x(y\vec{a})$
2. $(x+y)\vec{a}=x\vec{a}+y\vec{a}$
3. $x(\vec{a}+\vec{b})=x\vec{a}+x\vec{b}$ чанар биелнэ.

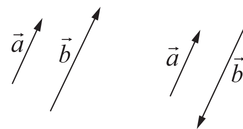
Баталгаа. 3 дугаар чанарын баталгааг хийе. Зурагт өгснөөр $\vec{a},\vec{b},\vec{a}+\vec{b}$ векторуудыг $x>0$ байх бодит тоогоор үржүүлье. $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DE}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{a}+\vec{b}$. $\overrightarrow{AC}=x\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=x\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}=x(\vec{a}+\vec{b})$. Гурвалжны дүрмээр $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$ тул $x\vec{a}+x\vec{b}=x(\vec{a}+\vec{b})$ болж батлагдав.
$x<0$ үед баталгааг бие даан гүйцэтгээрэй.



Жишээ 6. $4\left(3\vec{a}+\vec{b}\right)-2\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)$ илэрхийллийг хялбарчил.
Бодолт.
$4\left(3\vec{a}+\vec{b}\right)-2\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)=12\vec{a}+4\vec{b}-2\vec{a}+4\vec{b}=10\vec{a}+8\vec{b}=2\left(5\vec{a}+4\vec{b}\right)$ болно.

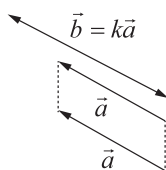
Параллел вектор

Нэг эсвэл параллел шулуун дээр орших $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторыг **параллел векторууд** гээд $\vec{a}\parallel\vec{b}$ гэж тэмдэглэнэ. Аливаа параллел $\vec{a}$, $\vec{b}$ хоёр вектор нь ижил эсвэл эсрэг чиглэлтэй байна. Ижил чиглэлтэй үед $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, эсрэг чиглэлтэй үед $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ гэж тэмдэглэнэ. Тэг вектор нь бүх вектортой параллел байна.

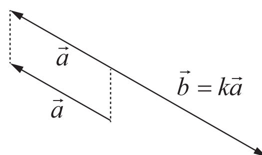


Чанар 5. Хэрэв $\vec{a}\parallel\vec{b}$ бол $\vec{b}=k\cdot\vec{a}$ эсвэл $\vec{a}=k\cdot\vec{b}$ байх k тоо олдоно.

$k>0$



$k<0$



Чанар 6. Хэрэв $\vec{a}\neq 0, \vec{b}\neq 0$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ нь параллел биш векторууд бол $\vec{a}=k\cdot\vec{b}$ байх k тоо олдохгүй.

Жишээ 7. $\vec{a}\neq 0, \vec{b}\neq 0$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ нь параллел биш векторууд бөгөөд $x\vec{a}+y\vec{b}=z\vec{a}+t\vec{b}$ байх x, y, z, t бодит тоонууд өгсөн бол $x=z$, $y=t$ гэж харуул.

Бодолт. $x\vec{a}+y\vec{b}=z\vec{a}+t\vec{b}$ гэдгээс $(x-z)\vec{a}=(t-y)\vec{b}$ болно. Хэрэв $x-z\neq 0$ бол $\vec{a}=\dfrac{t-y}{x-z}\vec{b}$ болж Чанар 6 ёсоор зөрчил үүснэ. Иймд $x-z=0$ болох бөгөөд $(t-y)\vec{b}=(x-z)\vec{a}=0$ гэдгээс $t-y=0$ болно. Өөрөөр хэлбэл $x=z$, $y=t$ боллоо.

10. Илэрхийллийг хялбарчил

а. $3\vec{a}+4\left(\vec{a}+5\vec{b}\right)$ б. $3\left(\vec{a}-7\vec{b}\right)+4\left(\vec{a}+5\vec{b}\right)$ в. $5\left(\vec{c}-8\vec{b}\right)_2\left(9\vec{b}+3\vec{c}\right)$

11. Үл мэдэгдэх $\vec{x}$ векторыг ол.

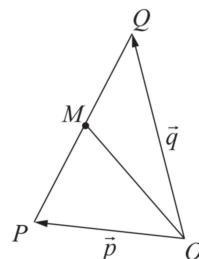
а. $\vec{x}+\vec{a}=2\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)$ б. $3\vec{x}+3\vec{b}=4\left(\vec{a}+\vec{x}\right)$ в. $\vec{c}-3\vec{x}=2\left(5\vec{x}+3\vec{b}\right)$

Векторын хэрэглээ

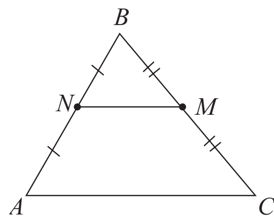
Жишээ 8. OPQ гурвалжны PQ тал дээр M цэгийг $|PM|=|MQ|$ байхаар авчээ. $\overrightarrow{OM}$ векторыг $\vec{p}$,$\vec{q}$ вектороор илэрхийл.
Бодолт. $\overrightarrow{PQ}=\vec{q}-\vec{p}$ байна.

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}=\vec{p}+\frac{1}{2}\left(\vec{q}-\vec{p}\right)=\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{q}-\frac{1}{2}\vec{p}=\frac{1}{2}\vec{q}+\frac{1}{2}\vec{p}=\frac{1}{2}\left(\vec{q}+\vec{p}\right)$$

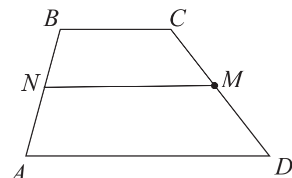
болно.



Жишээ 9. Гурвалжны дундаж шугам суурийн хагастай тэнцүү ба хоорондоо параллел болохыг батал.
Бодолт. ABC гурвалжны хувьд $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, NBM гурвалжны хувьд $\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{NM}$ байна. MN нь дундаж шугам гэдгийг



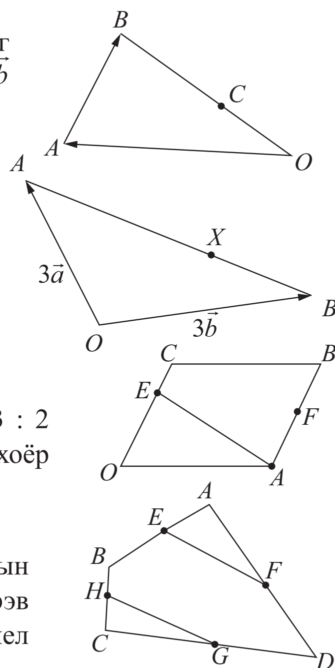
тооцвол $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{NB}$, $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BM}$ болно. Эдгээрийг $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ тэгшитгэлд орлуулбал $2\overrightarrow{NB}+2\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AC}$ буюу $2\left(\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{BM}\right)=\overrightarrow{AC}$ эндээс $2\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{AC}$. Иймд $\overrightarrow{NM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ болно. Эндээс $\left|\overrightarrow{MN}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right|$, $\overrightarrow{NM}$ ба $\overrightarrow{AC}$ вектор параллел болж батлагдав.



Жишээ 10. Трапецын дундаж шугам нь суурьудын нийлбэрийн хагастай тэнцүү ба суурьудтай параллел болохыг батал.

Бодолт. MN нь трапецын дундаж шугам болог. Тэгвэл $MN \parallel AD$, $MN=\dfrac{BC+AD}{2}$ болохыг баталъя.

$\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}$ мөн $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}$ байна. Эдгээр тэнцэтгэлийг харгалзуулан нэмбэл $2\overrightarrow{NM}=\left(\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NA}\right)+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{DM}\right)$ болно. $\overrightarrow{NB}$ ба $\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{CM}$ ба $\overrightarrow{DM}$ хос векторууд нь хэмжээ ижил, чиглэл эсрэг тул $\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NA}=\vec{0}$, $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{DM}=\vec{0}$. Иймд $2\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$ буюу $\overrightarrow{NM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)$ болно. Эндээс $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$ векторууд параллел тул $\overrightarrow{NM}$ вектор эдгээртэй параллел. $\left|\overrightarrow{NM}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right|$ ба $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$ векторууд ижил чиглэлтэй тул Чанар 6 ёсоор $\left|\overrightarrow{NM}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\right|+\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AD}\right|$ болж батлах зүйлээ батлав. (Энэ жишээг гурвалжны дундаж шугам суурийн хагастай тэнцүү болохыг ашиглан баталгааг өөр аргаар хийгээрэй.)



12. OAB гурвалжин өгчээ. C цэг нь OB талыг $BC : CO = 3:2$ харьцаатай хуваах ба $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ болно.
а. $\overrightarrow{OB}$ векторыг $\vec{a}$, $\vec{b}$ хоёр вектороор илэрхийл.
б. $\overrightarrow{AC}$ векторыг $\vec{a}$, $\vec{b}$ хоёр вектороор илэрхийл.

13. OAB гурвалжны AB тал дээр X цэгийг $AX : XB = 9:4$ байхаар авчээ. $\overrightarrow{OA}=3\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=3\vec{b}$ бол $\overrightarrow{AX}$ векторыг $\vec{a}$, $\vec{b}$ хоёр вектороор илэрхийл.

14. O цэг дээр нэг орой нь орших $OCBA$ параллелограмм өгчээ. $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ ба AB талын дундаж F, E цэг нь OC талыг $OE : EC = 3 : 2$ харьцаагаар хуваана. Дараах векторуудыг $\vec{a}$, $\vec{c}$ хоёр вектороор илэрхийл.
а. $\overrightarrow{OB}$ б. $\overrightarrow{AC}$ в. $\overrightarrow{AE}$ г. $\overrightarrow{OF}$

15. $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн AB, BC, CD, DA талын дундаж цэгийг E, H, G, F гэж тэмдэглэжээ. Хэрэв $\overrightarrow{CH}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DG}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DF}=\vec{c}$ бол HG, EF хэрчим параллел болохыг батал.

16. *ABCDOE* зөв зургаан өнцөгтийн талын урт 5 см, *O* цэг координатын эх болно. Хэрэв $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ бол дараах векторыг $\vec{a}$, $\vec{b}$ хоёр вектороор илэрхийл.

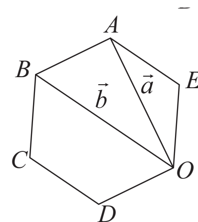
а. $\overrightarrow{BA}$ б. $\overrightarrow{OD}$ в. $\overrightarrow{BD}$

а. *BCD* өнцгийн хэмжээг ол.

б. *BCD* гурвалжны талбайг ол.

в. *BD* хэрчмийн уртыг ол.

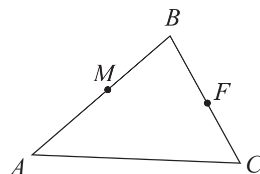
г. Зөв зургаан өнцөгтийн талбайг ол.



17. *ABC* гурвалжны *AB* талын дундаж *M* ба *BC* тал дээр $BF : FC = 3 : 4$ байх *F* цэгийг авав.

а. Хэрэв $\overrightarrow{AB}=\vec{b}, \overrightarrow{AC}=\vec{c}$ бол $\overrightarrow{MF}$ векторыг $\vec{b}$ ба $\vec{c}$ вектороор илэрхийл.

б. $\overrightarrow{MF}$ ба $\overrightarrow{AC}$ хоорондоо параллел эсэхийг тогтоо.



18. *OAB* гурвалжин өгчээ. *C* цэг нь *OB* талын дундаж бөгөөд $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{AB}=\vec{b}$ болно.

а. $\overrightarrow{OC}$ векторыг $\vec{a}$ ба $\vec{b}$ вектороор илэрхийл.

б. $\overrightarrow{BO}$ векторыг $\vec{a}$ ба $\vec{b}$ вектороор илэрхийл.

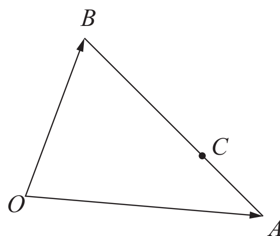
в. $\overrightarrow{AC}$ векторыг $\vec{a}$ ба $\vec{b}$ вектороор илэрхийл.

г. $\overrightarrow{BC}$ векторыг $\vec{a}$ ба $\vec{b}$ вектороор илэрхийл.

19. *OBA* гурвалжин өгчээ. *C* цэг нь *AB* талыг $BC{:}CA=2{:}1$ бөгөөд $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ болно.

а. $\overrightarrow{AB}$ векторыг $\vec{a}$ ба $\vec{b}$ вектороор илэрхийл.

б. $\overrightarrow{OC}$ векторыг $\vec{a}$ ба $\vec{b}$ вектороор илэрхийл.



20. *OABC* параллелограмм өгчээ. *AB, BC* талуудын дунджийг харгалзан *E, F* цэгээр тэмдэглэсэн бөгөөд $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OC}=\vec{c}$ болно.

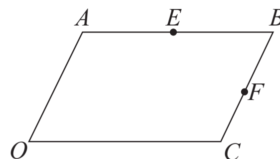
а. $\overrightarrow{BF}$ векторыг $\vec{a}$ ба $\vec{b}$ вектороор илэрхийл.

б. $\overrightarrow{AC}$ векторыг $\vec{a}$ ба $\vec{b}$ вектороор илэрхийл.

в. $\overrightarrow{OB}$ векторыг $\vec{a}$ ба $\vec{b}$ вектороор илэрхийл.

г. $\overrightarrow{EF}$ векторыг $\vec{a}$ ба $\vec{b}$ вектороор илэрхийл.

д. $\overrightarrow{AC}$ вектор $\overrightarrow{EF}$ вектортой параллел болохыг батал.



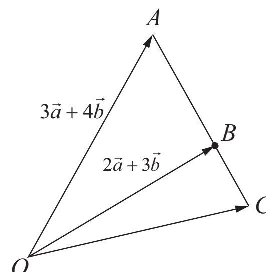
21. Хэрэв *OABC* параллелограммын *AC* ба *OB* диагоналиудын огтлолцлын цэг *D* ба $\overrightarrow{OA}=a$, $\overrightarrow{OC}=b$ болно. $\overrightarrow{CD}$ векторыг $\vec{a}$ ба $\vec{b}$ вектороор илэрхийл.

22. *OAB* гурвалжин өгчээ. *AC* тал дээр *B* цэгийг $AB : BC = 3 : 4$ байхаар сонгон авав.

а. $\overrightarrow{BA}$ векторыг $\vec{a}$ ба $\vec{b}$ вектороор илэрхийл.

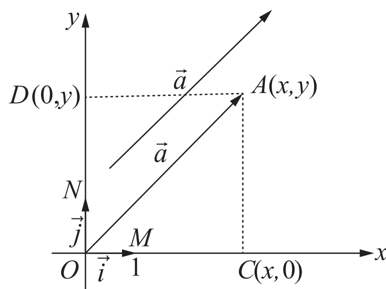
б. $\overrightarrow{OC}$ векторыг $\vec{a}$ ба $\vec{b}$ вектороор илэрхийл.

в. $\overrightarrow{BC}$ векторыг $\vec{a}$ ба $\vec{b}$ вектороор илэрхийл.



9.2. КООРДИНАТЫН ХАВТГАЙ ДЭЭРХ ВЕКТОР

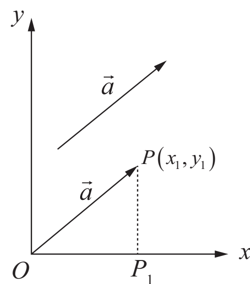
Векторыг суурь нэгж вектороор задлах



Тэгш өнцөгт координатын системийн эх O цэг дээр эхлэлтэй $\vec{i}$ ба $\vec{j}$ вектор авч үзье. $\vec{i}$ ба $\vec{j}$ векторууд харгалзан Ox, Oy тэнхлэгүүдийн эерэг чиглэлтэй ижил чиглэлтэй бөгөөд $|\vec{i}|=|\vec{j}|=1$ байг. Эдгээр $\vec{i}$, $\vec{j}$ хоёр векторыг **суурь нэгж вектор** гэж нэрлэнэ.

Координатын хавтгайд $\vec{a}$ вектор авъя. Координатын эх дээр эхлэл нь байх $\vec{a}$ вектортой тэнцүү $\overrightarrow{OA}$ вектор байгуулъя. A цэгээс координатын тэнхлэгүүдэд буулгасан перпедикулярын суурь $C(x,0), D(0,y)$ байг. $M(1,0)$, $N(0,1)$ цэгт төгсгөлтэй $\vec{i}=\overrightarrow{OM}, \vec{j}=\overrightarrow{ON}$ суурь нэгж вектор байгуулъя.
$\vec{a}=\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$ ба $\overrightarrow{OC}=x\cdot\vec{i}$, $\overrightarrow{OD}=y\cdot\vec{j}$ тул $\vec{a}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}$ болно. Энэхүү нийлбэрийг $\vec{a}$ векторыг $\vec{i}$, $\vec{j}$ хоёр вектороор задаллаа гэдэг. Өөрөөр хэлбэл $\vec{a}$ векторт (x,y) гэсэн хос тоог харгалзуулж болж байна. Буцаагаад (z,t) гэсэн хос тоо авахад $\vec{b}=z\vec{i}+t\vec{j}$ гэсэн вектор харгалзуулж болно. Хэрэв $\vec{a}=\vec{b}$ бол $x=z$, $y=t$ байх ба $x=z$, $y=t$ бол $\vec{a}=\vec{b}$ байна. Иймд хавтгайн дурын $\vec{a}$ векторыг түүний координат гэж нэрлэгдэх (x,y) гэсэн хос тоогоор төлөөлүүлж болох ба $\vec{a}=(x,y)$ эсвэл $\vec{a}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ гэж тэмдэглэнэ.

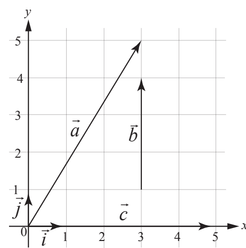
Радиус вектор



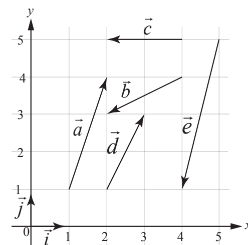
Хавтгайн координатын системд $\vec{a}$ вектор өгсөн байг. $\overrightarrow{OP}=\vec{a}$ байх $\overrightarrow{OP}$ вектор байгуулъя. P цэгийн координатыг $\overrightarrow{OP}$ векторын координат гэж нэрлэдэг. Хэрэв P цэгийн координат (x_1, y_1) бол $\overrightarrow{OP}$ векторын координатыг $\overrightarrow{OP}=(x_1, y_1)$ гэж тэмдэглэнэ.
Координатын эх дээр эхлэлтэй векторыг **радиус вектор** гэж нэрлэнэ.
Аливаа вектортой тэнцүү векторыг координатын эх дээр эхлэлтэй байгуулж радиус вектороор дүрсэлж болно.
Тухайлбал: $\overrightarrow{OP}$ векторын урт нь Пифагорын теоремоор $|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{OP_1^2+PP_1^2}$ буюу $|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$ болно.

Жишээ 1. $\vec{b}=(4,-3)$ векторын уртыг ол.

Бодолт. $|\vec{b}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$ байна.



Жишээ 2. Дараах векторуудыг $\vec{i}$, $\vec{j}$ суурь нэгж вектороор задал.
Бодолт.
а. $\vec{a}$ вектор Ox тэнхлэгийн эерэг чиглэлд 3 нэгж шилжсэн тул $3\vec{i}$, Oy тэнхлэгийн эерэг чиглэлд 5 нэгж шилжсэн тул $5\vec{j}$ болно. $\vec{a}=3\vec{i}+5\vec{j}$. Иймд:
а. $\vec{b}=0\vec{i}+3\vec{j}=3\vec{j}$ в. $\vec{c}=5\vec{i}+0\vec{j}=5\vec{j}$



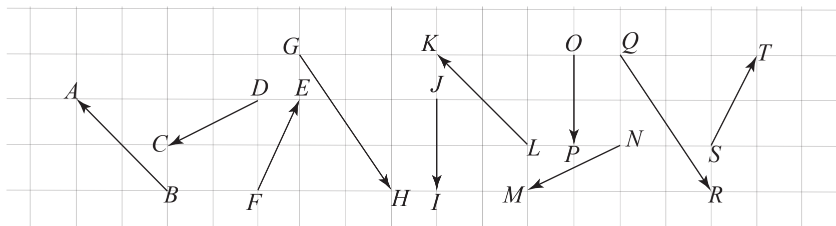
23. Зурагт өгсөн векторуудыг $\vec{i}$, $\vec{j}$ суурь нэгж вектороор задалж бичээд, уртыг нь ол.

24. $A(0, 1)$, $B(1, 0)$, $C(1, 2)$, $D(2, 1)$ цэг өгчээ. $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{DC}$ хоёр вектор тэнцүү болохыг батал.

25. $A(1, 1)$, $B(-1, 0)$, $C(0, 1)$ гурван цэг өгчээ. $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{DC}$ хоёр вектор тэнцүү байх $D(x, y)$ цэгийг ол.

26. $\vec{b} = (4, x)$ векторын урт $\sqrt{20}$ бол x-ийг ол.

27. Тэнцүү векторыг ол.



28. $\vec{a} = (2, -4), \vec{b} = (1, 2), \vec{c} = (1, -2), \vec{d} = (-2, -4)$ вектор өгчээ. Параллел хос векторыг ол.

29. Дараах координаттай векторыг зур. (Дэвтрийн дөрвөлжин нүд ашигла)

а. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ б. $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ в. $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ г. $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ д. $\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

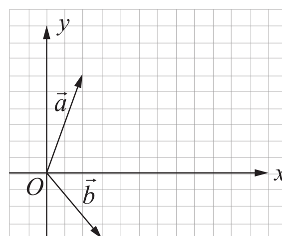
30. Хэрэв $\vec{a} = (2, -5), \vec{b} = (3, x)$ хоёр вектор параллел бол x-ийн утгыг ол.

31. $\vec{a} = (x, 1), \vec{b} = (4, x)$ хоёр вектор параллел байх x-ийн утгыг ол.

32. Зурагт $\vec{a}, \vec{b}$ вектор дүрслэгджээ. Дараах векторыг байгуул.

а. $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ б. $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$

в. $\vec{e} = \vec{b} - \vec{a}$ г. $\vec{g} = -\vec{a} - \vec{b}$

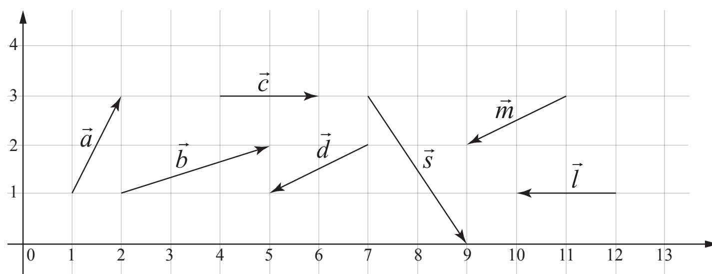


33. Зурагт өгсөн векторуудын хувьд

а. Координатыг нь бич.

б. Уртыг нь ол.

в. Векторыг $\vec{i}$, $\vec{j}$ вектороор задал.

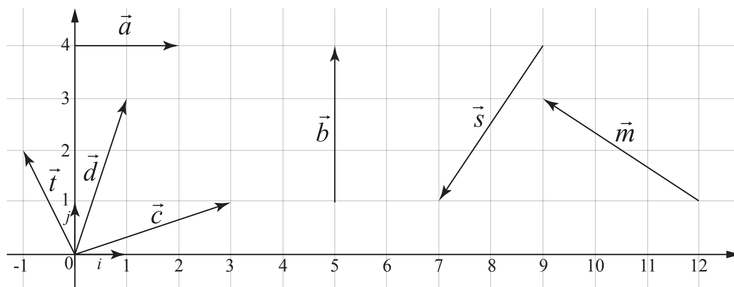


34. Дараах векторуудыг байгуул.

$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{d} = -2\vec{i} - 4\vec{j}$

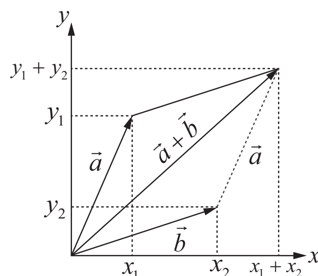
35. Дараах векторуудыг $\vec{i}$, $\vec{j}$ суурь нэгж вектороор задал.
$\vec{a}=(2,-4)$, $\vec{b}=(1,2)$, $\vec{c}=(1,-2)$, $\vec{d}=(2,-3)$

36. Дараах векторыг $\vec{i}$, $\vec{j}$ суурь нэгж вектороор задал.



9.3. ВЕКТОРЫН ҮЙЛДЛИЙГ КООРДИНАТААР ИЛЭРХИЙЛЭХ

Векторын нэмэх үйлдэл



$\vec{a}=(x_1,\ y_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2)$ гэж $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторууд координатаараа өгсөн байг. Тэгвэл $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}$, $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}$ болно. Иймд хоёр векторын нийлбэр нь $\vec{a}+\vec{b}=\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}\right)+\left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}\right)=\left(x_1\vec{i}+x_2\vec{i}\right)+\left(y_1\vec{j}+y_2\vec{j}\right)=$ $(x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j}$ болно.

Нийлбэртэй адилаар $\vec{a}$, $\vec{b}$ хоёр векторын ялгавар нь $\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2)\vec{i}+(y_1-y_2)\vec{j}$ болно.

Векторыг тоогоор үржүүлбэл $k\vec{a}=(kx_1)\vec{i}+(kx_2)\vec{j}$ болно. Иймд дараах чанар биелнэ.

Чанар 7. $\vec{a}=(x_1,\ y_1),\vec{b}=(x_2,\ y_2)$ вектор өгсөн байг.
1. $\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$
2. $\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$
3. $k\vec{a}=(kx,ky),k\in\mathbb{R}$

Жишээ 1. $\vec{a}=(2,-4)$ ба $\vec{b}=(1,\ 3)$ вектор өгөв. Дараах үйлдлийг гүйцэтгэ.
а. $\vec{a}+\vec{b}$ б. $\vec{a}-\vec{b}$ в. $2\vec{a}$ г. $3\vec{a}+2\vec{b}$

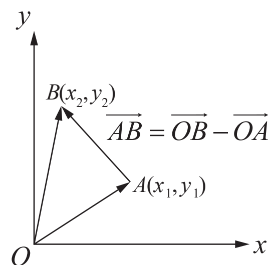
Бодолт.
а. $\vec{a}+\vec{b}=(2+1,-4+3)=(3,-1)$
б. $\vec{a}-\vec{b}=(2-1,-4-3)=(1,-7)$
в. $2\cdot\vec{a}=2\cdot(2,-4)=(4,-8)$
г. $3\vec{a}+2\vec{b}=3(2,-4)+2(1,3)=(8,-6)$

Векторын координатыг эхлэл, төгсгөлийн цэгийн координатаар илэрхийлэх

$\overrightarrow{AB}$ векторын координатыг түүний эхлэл $A(x_1,\ y_1)$ цэг болон төгсгөл $B(x_2,\ y_2)$ цэгийн координатаар илэрхийлье. $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ радиус вектор татахад тэдгээрийн координат нь $\overrightarrow{OA}=(x_1,\ y_1)$, $\overrightarrow{OB}=(x_2,\ y_2)$ болно. Эдгээр вектороор $\overrightarrow{AB}$ векторыг илэрхийлбэл $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ болох тул дээрх чанар ёсоор $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$ байна.

Иймд аливаа векторын координат нь уг векторын төгсгөлийн цэгийн координатаас эхлэлийн цэгийн координатыг харгалзуулан хассантай тэнцэнэ. Иймд $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$ байна.

Векторын уртыг түүний координатаар нь тодорхойлдог тул $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ болно.



Жишээ 2. $C(3,2)$ ба $D(-1, 7)$ цэгийн хувьд $\overline{CD}$ векторын координат, уртыг ол.

Бодолт.

а. $\overrightarrow{CD}=(-1-3, 7-2)=(-4, 5)$ болно.

б. $|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{(-1-3)^2+(7-2)^2}=\sqrt{(-4)^2+5^2}=\sqrt{16+25}=\sqrt{41}$ болно.

Жишээ 3. $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ хоёр цэгийн дундаж C цэгийн координатыг ол.

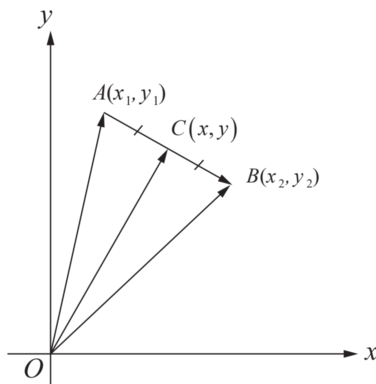
Бодолт. C цэгийн координатыг (x, y) гэе.

$\overrightarrow{OA}=(x_1, y_1), \overrightarrow{OC}=(x, y), \overrightarrow{OB}=(x_2, y_2)$ бөгөөд

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$ болно.

Эндээс $\overrightarrow{AC}=(x-x_1, y-y_1)$ гарна.

$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}$. Эндээс $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=(x_2-x, y_2-y)$ болно. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ тул $x-x_1=x_2-x, y-y_1=y_2-y$ болох тул $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$ байна.



37. Хэрэв $A(3, -1)$, $B(5, 1)$ бол $\overline{AB}$ векторын координат ба уртыг ол.

38. Хэрэв $\vec{a}=(3, 4)$, $\vec{b}=(-2, 8)$ бол нийлбэр вектор болон түүний уртыг ол.

39. Хэрэв $\vec{a}=(2,-3)$, $\vec{b}=(-4,-1)$ бол дараах нийлбэрийг ол.

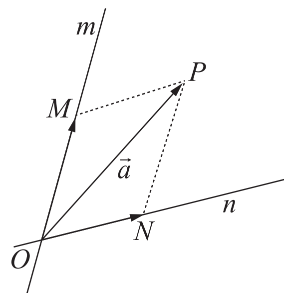
а. $\vec{a}+\vec{b}$ б. $3\vec{a}+2\vec{b}$ в. $4\vec{a}-\vec{b}$ г. $\vec{a}-3(\vec{a}+2\vec{b})$

40. $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторын координатыг ол.

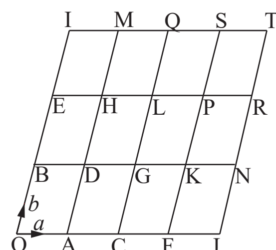
а. $\vec{b}+\vec{c}=(1,-4)$ ба $2\vec{b}+\vec{c}=(-2,4)$ б. $\vec{b}-\vec{c}=(-2,4)$ ба $\vec{b}+\vec{c}=(3,-6)$

Векторыг хоёр вектороор задлах

Хоорондоо параллел биш *m, n хоёр* шулуун ба дурын $\vec{a}$ вектор өгсөн байг. $\vec{a}$ векторыг *n,m* хоёр шулуун дээр орших векторуудын нийлбэрт тавья. *n, m* шулуунуудын огтлолцлын цэг O дээр эхлэлтэйгээр $\vec{a}$ векторыг байгуулж, төгсгөлийн цэгийг P гэе. P цэгийг дайруулан *m, n*-тэй параллел шулуун татан тэдгээрийг огтлох цэгийг харгалзан *M, N* гэе. Тэгвэл параллелограммын дүрмээр $\vec{a}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OM}$ болно. Векторыг



өгсөн чиглэлийн дагуу векторуудын нийлбэр болгон задлах үйлдэл нь физикийн хичээлд хурд, хүч, хурдатгалыг сонгож авсан тэнхлэгүүдийн дагуу задлахад хэрэглэгддэг.

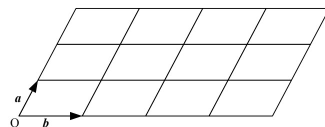


Жишээ 4: Ижил талууд бүхий параллелограммуудыг нийлүүлсэн $OITJ$ параллелограмм өгчээ. $\overrightarrow{OQ}$ векторыг $\vec{a}$ ба $\vec{b}$ вектороор илэрхийл.

Бодолт. $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CQ}$ бөгөөд $\overrightarrow{OC}$ ба $\overrightarrow{CQ}$ векторуудыг $\vec{a}$ ба $\vec{b}$ вектороор илэрхийлбэл $\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}=2\vec{a}$, $\overrightarrow{CQ}=3\overrightarrow{CG}=3\overrightarrow{OB}=3\vec{b}$ болно. Иймд $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CQ}=2\vec{a}+3\vec{b}$ байна.

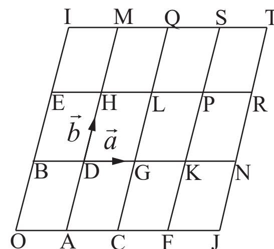
41. Жишээ 4-д өгсөн зургийг ашиглан дараах векторыг $\vec{a}$ ба $\vec{b}$ вектороор илэрхийл.

а. $\overrightarrow{OD}$ б. $\overrightarrow{ON}$ в. $\overrightarrow{BS}$
г. $\overrightarrow{AP}$ д. $\overrightarrow{AB}$ е. $\overrightarrow{FM}$



42. C, D, E, F, G цэгүүдийг олж дүрслээрэй.

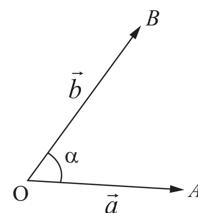
а. $\overrightarrow{OC}=2\vec{a}+3\vec{b}$ б. $\overrightarrow{OD}=2\vec{a}+\vec{b}$
в. $\overrightarrow{OD}=2\vec{a}+\vec{b}$ г. $\overrightarrow{OE}=4\vec{a}$
д. $\overrightarrow{OF}=4\vec{a}+2\vec{b}$



43. Ижил талууд бүхий параллелограммуудыг нийлүүлсэн $OITJ$ параллелограмм өгчээ. $\overrightarrow{DH}=\vec{a}$ ба $\overrightarrow{DB}=\vec{b}$ вектороор дараах векторуудыг илэрхийл.

а. $\overrightarrow{DM}$ б. $\overrightarrow{DI}$ в. $\overrightarrow{DS}$
г. $\overrightarrow{LA}$ д. $\overrightarrow{RB}$ е. $\overrightarrow{SA}$
ё. $\overrightarrow{NM}$ ж. $\overrightarrow{KM}$ з. $\overrightarrow{TO}$

9.4. ХОЁР ВЕКТОРЫН СКАЛЯР ҮРЖВЭР ХОЁР ВЕКТОРЫН ХООРОНДОХ ӨНЦӨГ



$\vec{a},\vec{b}$ гэсэн тэгээс ялгаатай векторууд авъя. Хавтгай дээр дурын O цэг авч $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ байх $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ векторууд байгуулъя. Уг хоёр векторын хооронд үүсэх өнцгийг $\angle AOB=\alpha$ гэж тэмдэглэе. Тэгвэл $0\le\alpha\le180^0$ байх $\angle AOB$ өнцгийг $\vec{a},\vec{b}$ хоёр **векторын хоорондох өнцөг** гэнэ. $\vec{a},\vec{b}$ векторын хоорондох өнцгийг $\vec{a}\,^\wedge\vec{b}$ гэж тэмдэглэдэг.

Скаляр үржвэр.

Координатын хавтгай дээр өгсөн $\overrightarrow{OA}=\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}$ векторын хоорондох α өнцгийг олъё. OAB гурвалжны хувьд косинусын теорем бичиж $\cos\alpha$-ыг

олбол $\cos\alpha=\dfrac{OA^2+OB^2-AB^2}{2\cdot OA\cdot OB}$ болно.

Гурвалжны OA, OB, AB талын урт нь харгалзан $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{AB}$ векторын урттай тэнцүү.

Иймд эдгээр векторын уртыг олбол $OA = |\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, OB = |\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$

болох ба $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$ гэдгээс

$AB = |b - a| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ болох тул

$$\cos\alpha = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB} = \frac{(x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) - ((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)}{2 \cdot \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

$$= \frac{x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - (x_1^2 - 2x_1x_2 + y_1^2 + x_2^2 - 2y_2y_1 + y_2^2)}{2|\vec{a}||\vec{b}|}$$ болно.

Эндээс $\cos\alpha = \dfrac{2x_1x_2 + 2y_1y_2}{2|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ байна.

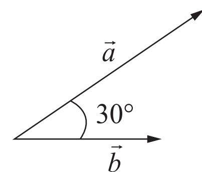
Тодорхойлолт. $x_1x_2 + y_1y_2$ тоог $\vec{a}$ ба $\vec{b}$ векторын **скаляр үржвэр** гэх бөгөөд $\vec{a} \cdot \vec{b}$ гэж тэмдэглэнэ.

Энэ тэмдэглэгээг ашиглан бичвэл $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ болох ба хэрэв скаляр үржвэрийг олбол $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\alpha$ байна.

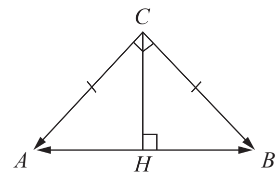
Жишээ 1. Хэрэв $\vec{a} = (3,\ 4)$, $\vec{b} = (-2,\ 8)$ бол $\vec{a}$, $\vec{b}$ хоёр векторын скаляр үржвэрийг ол.
Бодолт. $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 = 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 8 = 26$

Жишээ 2. Хэрэв $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a}$ ба $\vec{b}$ векторын хоорондох өнцөг $30°$ бол $\vec{a} \cdot \vec{b}$ скаляр үржвэрийг ол.

Бодолт. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 30° = 4 \cdot 3 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$



Жишээ 3. Хэрэв тэгш өнцөгт адил хажуут ACB гурвалжны катетын урт 4, $\angle ACB = 90°$ бол дараах скаляр үржвэрийг ол.
а. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ б. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CH}$ в. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CH}$

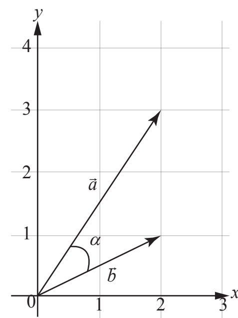


Бодолт.
а. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cos 90° = 4 \cdot 4 \cdot 0 = 0$

б. $\cos 45° = \dfrac{CH}{CA}$ тул $CH = CA \cdot \cos 45° = 4 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$. Иймд
$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CH} = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CH}| \cos 45° = 4 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 16$

в. Хэрэв $BA = 2 \cdot CH = 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ гэдгийг тооцвол $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CH} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{CH}| \cos 90°$ $= 4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 0 = 0$ болж байна. Эндээс дараах дүгнэлтийг хийж болно.

Чанар 8. $\vec{a}$ ба $\vec{b}$ векторууд перпендикуляр байх нөхцөл нь $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ байна.



Жишээ 4. Хэрэв $\vec{a}=(2,\ 3), \vec{b}=(2,1)$ бол $\vec{a},\ \vec{b}$ хоёр векторын хоорондох өнцгийн хэмжээг ол.

Бодолт. $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13},\ |\vec{b}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\,x_2+y_1\,y_2=2\cdot 2+3\cdot 1=7,\ \cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{7}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{7}{\sqrt{65}}$

44. Хэрэв $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=5.\ \vec{a},\ \vec{b}$ хоёр векторын хоорондох өнцөг
а. 60° б. 45° в. 90° г. 120°
бол $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ол.

45. $\vec{a}$ ба $\vec{b}$ векторын хоорондох өнцгийн хэмжээг ол.
а. $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=1$
б. $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4\sqrt{2},\ \vec{a}\cdot\vec{b}=12$

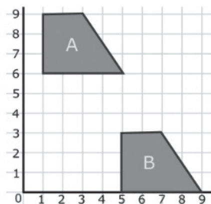
46. $\vec{a}$ ба $\vec{b}$ векторын хоорондох өнцгийн хэмжээг ол.
а. $\vec{a}=(-2,\ 5), \vec{b}=(1,4)$ б. $\vec{a}=(3,\ 1), \vec{b}=(1,2)$

БҮЛГИЙН НЭМЭЛТ ДААЛГАВАР

1. Дараах нөхцөлийг хангах хоёр векторыг дэвтрийн дөрвөлжин нүд ашиглан зур.
а. Ижил урттай, ижил чиглэлтэй
б. Ижил урттай, эсрэг чиглэлтэй
в. Ижил урттай, параллел биш
г. Нэг нь хоёр дахь вектороос 3 дахин урт, параллел

2. ABC гурвалжны AM медиан татав.
а. $\overrightarrow{AM}$ векторыг $\overrightarrow{AB}$ ба $\overrightarrow{BM}$ вектороор илэрхийл.
б. $\overrightarrow{MC}$ векторыг $\overrightarrow{CB}$ вектороор илэрхийл.
в. $\overrightarrow{BM}$ векторыг $\overrightarrow{AB}$ ба $\overrightarrow{AM}$ вектороор илэрхийл.
г. $\overrightarrow{CA}$ векторыг $\overrightarrow{AB}$ ба $\overrightarrow{BC}$ вектороор илэрхийл.

3. OPQ гурвалжны PQ тал дээр M цэгийг $PM = 2MQ$ байхаар авчээ. $\overrightarrow{OM}$ векторыг $\vec{p}, \vec{q}$ вектороор илэрхийл.



4. A дүрсийг B дүрсэд, B дүрсийг A дүрсэд шилжүүлэх векторыг ол.

5. $2\vec{a}+3\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)$ илэрхийллийг хялбарчил

6. Үл мэдэгдэх $\vec{x}$ векторыг ол.
$\vec{x}+2\vec{c}=2\left(\vec{a}+3\vec{c}\right)$

7. $\overrightarrow{GL}=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ векторыг зур.

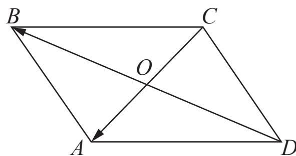
8. Хэрэв $A(2, -3)$, $B(3, 2)$ бол $\overrightarrow{AB}$ векторын координат, уртыг ол.

9. Хэрэв $\vec{a}=(1,-4),\ \vec{b}=(4,-3)$ бол $\vec{a}+\vec{b}$ болон уртыг ол.

10. Хэрэв $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=5, \vec{a}$ ба $\vec{b}$ векторын хоорондох өнцөг 60^0 бол $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ол.

11. Хэрэв ABC зөв гурвалжны талын урт 5 бол $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ векторын скаляр үржвэрийг ол.

12. Хэрэв $\vec{a}=(-2,\ 5), \vec{b}=(4,-1)$ бол $\vec{a}$ ба $\vec{b}$ векторын хоорондох өнцгийн хэмжээг ол.



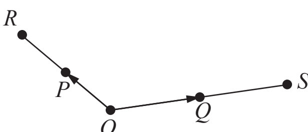
13. Хэрэв $\vec{a}=\overrightarrow{OA}, \vec{b}=\overrightarrow{OB}$ бол $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ векторуудыг $\vec{a}$ ба $\vec{b}$ вектороор илэрхийл.

14. Дараах векторуудын координатыг бич.
$\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}, \vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}, \vec{c}=2\vec{i}-\vec{j}.$

15. Дараах векторуудыг $\vec{i}$ ба $\vec{j}$ координатын вектороор задал.
$\vec{a}=(1,2), \vec{b}=(-1,2), \vec{c}=(1,-2), \vec{d}=(-2,-3)$

16. Хэрэв O цэг нь $ABCDEF$ зөв зургаан өнцөгтийн төв бол $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$ вектор бүрийг $\overrightarrow{OE}=\vec{p}, \overrightarrow{OF}=\vec{q}$ вектороор илэрхийл.

17. $ABCD$ параллелограмм ба O цэг өгчээ. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$ болохыг батал.



18. O координатын эх ба $\overrightarrow{OP}=\vec{p}, \overrightarrow{OQ}=\vec{q}$, $OP=PR$, $OQ=QS$ болно.
а. $\overrightarrow{PR}$ векторыг $\vec{p}, \vec{q}$ вектороор илэрхийл.
б. Хэрэв PS ба RQ огтлолцлын цэг M ба $RM=2MQ$ бол $PM:PS$ харьцааг ол.

19. Хэрэв $|\vec{a}|=5, |\vec{b}|=2$, $\vec{a}$ ба $\vec{b}$ векторын хоорондох өнцөг 30^0 бол $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ол.

20. Хэрэв $|\vec{a}|=4, |\vec{b}|=3, \vec{a}\cdot\vec{b}=6\sqrt{3}$ бол $\vec{a}$ ба $\vec{b}$ векторын хоорондох өнцгийн хэмжээг ол.

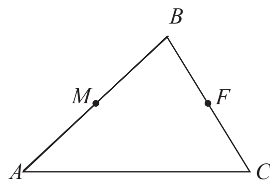
21. Хэрэв $\vec{a}=(3, 4), \vec{b}=(-3,2)$ бол эдгээрийн хоорондох өнцгийн хэмжээг ол.

22. Хэрэв $\vec{a}=(3,-1), \vec{b}=(-2,3)$ бол дараах векторыг ол.
а. $\vec{a}+\vec{b}$ б. $\vec{a}+2\vec{b}$ в. $4\vec{a}-3\vec{b}$ г. $\vec{b}+2(\vec{a}-3\vec{b})$

23. $\vec{a}$ ба $\vec{b}$ векторууд параллел бол x-ийг ол.
а. $\vec{a}=(2,-1), \vec{b}=(2,x)$ б. $\vec{a}=(2,x-1), \vec{b}=(x+1,x)$

24. Хэрэв $ABCDEF$ зөв зургаан өнцөгтийн хувьд $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AF}=\vec{b}$ өгсөн бол дараах векторуудыг $\vec{a}$ ба $\vec{b}$ вектороор илэрхийл.
а. $\overrightarrow{AD}$ б. $\overrightarrow{BD}$ в. $\overrightarrow{FC}$ г. $\overrightarrow{BE}$

25. $OABC$ параллелограмм өгөгджээ. $\overrightarrow{OA}=\vec{p}$ ба $\overrightarrow{OB}=\vec{q}$ ба BC, AC талын дунджуудыг харгалзан D, E гэж тэмдэглэв. Тэгвэл $\vec{p}, \vec{q}$ вектороор дараах векторуудыг илэрхийл.
а. $\overrightarrow{AB}$ б. $\overrightarrow{OD}$ в. $\overrightarrow{DE}$ г. $\overrightarrow{OE}$



26. ABC гурвалжны AB талын дундаж M, BC талын дундаж F байг.
а. Хэрэв $\overrightarrow{AB}=\vec{b}, \overrightarrow{AC}=\vec{c}$ бол $\overrightarrow{MF}$ векторыг $\vec{a}$ ба $\vec{b}$ вектороор илэрхийл.
б. $\overrightarrow{MF}$ ба $\overrightarrow{AC}$-г хоорондоо параллел эсэхийг тогтоо.

27. Трапецын диагоналиудын дундаж цэгийг холбосон хэрчмийн урт сууриудын ялгаврын хагастай тэнцүү болохыг батал.

28. Хавтгайн дурын $A_1, A_2, \ldots, A_n$ цэгүүдийн хувьд
$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}$ тэнцэтгэлийг батал.

29. Хэрэв $M(3,-1)$ координаттай цэгээс $\vec{c}=(-4, 3)$ вектор татсан бол векторын төгсгөлийн цэгийн координатыг ол.

X БҮЛЭГ. МАТРИЦ

Энэ бүлэг сэдвийг судалснаар дараах мэдлэг, чадварыг эзэмшинэ.

- *Мэдээллийг матриц хэлбэрээр илэрхийлэх*
- *Матрицын нэмэх үйлдлийг мэдэх, гүйцэтгэх*
- *Тэг матрицыг мэдэх, ойлгох*
- *Эсрэг матрицыг мэдэх, ойлгох*
- *Матрицыг тоогоор үржүүлэх үйлдлийг мэдэх, гүйцэтгэх*
- *Матрицын үржүүлэх үйлдлийг мэдэх, гүйцэтгэх*
- *Нэгж матрицыг мэдэх*
- 2×2 *хэмжээстэй матрицын тодорхойлогчийг мэдэх, олох*
- 2×2 *хэмжээстэй матрицын урвууг мэдэх, олох*

10.1. МЭДЭЭЛЛИЙН МАТРИЦ

Мэдээллийг зарим үед дараах хэлбэрээр илэрхийлэх нь илүү тохиромжтой байдаг. Жишээлбэл: Нэгэн сургуулийн X, XI, XII ангийн охид хөвгүүдийн тоог хүснэгтээр харуулав.

	Хөвгүүд	Охид
X анги	30	35
XI анги	27	30
XII анги	29	28

Дээрх хүснэгтээс зөвхөн тоонуудыг ялган хаалт ашиглан бичвэл $\begin{pmatrix} 30 & 35 \\ 27 & 30 \\ 29 & 28 \end{pmatrix}$ болно.

Энэ дүрслэлийг дээр өгсөн мэдээллийн **матриц хэлбэрийн дүрслэл** гэдэг. 30, 27, 29 гэж доошоо цувуулан бичсэн тоонуудыг нэгдүгээр багана, 35, 30, 28 гэж цувуулан бичсэн тоонуудыг хоёрдугаар багана, харин 30, 35 гэж хойшоо цувуулан бичсэн тоонуудыг нэгдүгээр мөр, 27, 30 гэсэн тоонуудыг хоёрдугаар мөр, 29, 28 гэсэн тоонуудыг гуравдугаар мөр гэж тус тус нэрлэдэг. Ийнхүү тоонуудыг мөр ба баганаас тогтох тэгш өнцөгт хэлбэрт оруулж бичсэн бичлэгийг **матриц** гэнэ.

Матрицыг латин цагаан толгойн том үсгээр A, B, C гэх мэтээр тэмдэглэнэ. Матрицыг бүрдүүлж байгаа тоог матрицын **элемент** гэж нэрлэнэ.

$A=\begin{pmatrix} 30 & 35 \\ 27 & 30 \\ 29 & 28 \end{pmatrix}$ матриц нь 3 мөр, 2 баганатай байна.

Матрицын мөр ба баганын тоог **матрицын хэмжээс** гэж нэрлэх бөгөөд дээрх матрицыг 3×2 хэмжээстэй матриц гээд $A_{3\times 2}$ гэж тэмдэглэнэ. Хэмжээсийг бичихдээ мөрийн тоог эхэлж бичдэг.

Санамж Матрицын нэг мөрд дараалан бичигдсэн элемент болох тоонуудыг хооронд нь тодорхой хэмжээтэй зай авч ялгах нь зүйтэй.

Жишээлбэл: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0.2 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ матрицуудын хэмжээс харгалзан $2\times 2,\ 2\times 3,\ 2\times 1,\ 1\times 3$ байна.

3×2 хэмжээстэй A матрицыг ерөнхий тохиолдолд давхар дугаарлалт ашиглан бичвэл

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

болно. Эндээс харвал элементүүдийг дугаарлахдаа уг элементийн орших байгаа мөрийн дугаарыг эхэнд нь, баганын дугаарыг хойно нь бичиж байна. Жишээлбэл, a_{21} нь A матрицын хоёрдугаар мөрийн нэгдүгээр баганад орших элемент, a_{32} нь гуравдугаар мөрийн хоёрдугаар баганад орших элемент байна.

Санамж Матрицын элементүүдийг матрицыг тэмдэглэсэн үсэгтэй ижил гэхдээ жижиг үсэг ашиглан тэмдэглэнэ.

Хэрэв ижил хэмжээстэй *A, B* хоёр матрицын харгалзах элемент бүр тэнцүү бол эдгээрийг **тэнцүү матриц** гэх ба $A = B$ гэж тэмдэглэнэ.

Өөрөөр хэлбэл: Хэрэв $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ ба $A = B$ бол $a_{11} = b_{11}, a_{12} = b_{12}, a_{21} = b_{21}$, $a_{22} = b_{22}$ байна.

Жишээ 1. Дараах матрицын хэмжээсийг тодорхойлж нэгдүгээр мөр, гуравдугаар баганын элемент мөн гуравдугаар мөр, хоёрдугаар баганын элементийг ол.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -7 \\ \frac{1}{2} & 10 & 4 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Бодолт. B матриц нь 3 мөр, 3 баганатай тул хэмжээс нь 3×3 байх ба $b_{13} = -7, b_{32} = -3$ байна.

Жишээ 2. $A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 3 & 5 & -7 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ матрицын i дүгээр мөрийн j дүгээр баганын элемент нь a_{ij} гэдгийг ашиглан a_{12}, a_{23}, a_{31} элементийн нийлбэрийг ол.

Бодолт. Матрицаас харвал $a_{12} = 8,\ a_{23} = -7,\ a_{31} = -1$ учир $a_{12} + a_{23} + a_{31} = 0$ болно.

Жишээ 3. Дараах нөхцөлийг хангах *a,b,c,d* тоог ол.

$$\begin{pmatrix} 2 & a \\ 5-b & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -2 \\ 0 & d+a \end{pmatrix}$$

Бодолт. Матрицын тэнцэх нөхцөл ёсоор харгалзах элементүүд тэнцүү тул $c = 2,\ a = -2,\ 5-b = 0,\ -1 = d + a$ болно. Эндээс $c = 2,\ a = -2,\ b = 5,\ d = 1$ болно.

1. Дараах мэдээллүүдийг матрицаар илэрхийл.

а. Монголын баг тамирчид тэмцээнээс 5 алтан медаль, 3 мөнгөн медаль, 2 хүрэл медаль хүртлээ. Мэдээллийг 1×3 матрицаар илэрхийл.

б. 2014 онд 80 сурагч дууны, 65 сурагч бүжгийн, 40 сурагч хөгжмийн дугуйланд суралцжээ. Харин 2015 онд 90 сурагч дууны, 50 сурагч бүжгийн, 44 сурагч хөгжмийн дугуйланд суралцжээ. Энэ мэдээллийг 2×3 матриц хэлбэрээр илэрхийлж, тайлбарла.

в. Эхний улиралд 10А ангийн 10 сурагч A, 12 сурагч B, 18 сурагч C үнэлгээтэй суралцжээ. Харин 2 дугаар улиралд 12 сурагч A, 13 сурагч B, 15 сурагч C үнэлгээтэй суралцжээ. Энэ мэдээллийг 3×2 матриц хэлбэрээр илэрхийлж, тайлбарла.

2. Дараах матрицуудын хувьд хэмжээсийг тодорхойлж, матрицад тохирох ямар нэгэн мэдээллийг зохио.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 23 & 16 & 21 \\ 14 & 13 & 28 \\ 21 & 20 & 17 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 12 & 10 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 65 \\ 7 \end{pmatrix}$$

3. Өгөгдсөн $A_{3\times3}$ матрицын элементүүдийг ашиглан $B_{2\times2}$ матрицын элементүүдийг ол.

$$A = \begin{pmatrix} 23 & 11 & 9 \\ 5 & 3 & 12 \\ 14 & 6 & 10 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

4. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ матрицын хувьд нэгдүгээр мөр хоёрдугаар баганын элемент дээр хоёрдугаар мөр гуравдугаар баганын элементийг нэмэхэд хэд гарах вэ?

5. Матрицуудын тэнцүү байх нөхцөлийг ашиглан

а. $\begin{pmatrix} x-3 \\ y+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ байх x, y тоог,

б. $\begin{pmatrix} x+y & y-x \\ z-2t & t+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$ байх x, y, z, t тоог тус тус ол.

10.2. МАТРИЦЫГ НЭМЭХ БА МАТРИЦЫГ ТООГООР ҮРЖҮҮЛЭХ ҮЙЛДЭЛ

Матрицыг нэмэх үйлдэл.

Дэлгүүрийн 2 салбарт гурван өдрийн турш зурагт ба хөргөгч худалджээ. Дараах хүснэгтэд салбар бүрд хэдэн бараа худалдсаныг үзүүлэв.

I салбар	Зурагт	Хөргөгч
I өдөр	3	5
II өдөр	2	3
III өдөр	5	4

I салбар	Зурагт	Хөргөгч
I өдөр	4	3
II өдөр	5	3
III өдөр	3	4

Тэгвэл 2 салбар нийлээд өдөр бүр хэчнээн тооны зурагт хөргөгч худалдсаныг олж хүснэгтэд бичвэл

2 салбар нийлээд	Зурагт	Хөргөгч
I өдөр	7	8
II өдөр	7	6
III өдөр	8	8

болно. Эдгээр хүснэгтэн мэдээллийг матриц ашиглан

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+4 & 5+3 \\ 2+5 & 3+3 \\ 5+3 & 4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 7 & 6 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

гэсэн байдлаар бичиж болно.
Үүнээс үндэслэн бид матриц дээр матрицыг нэмэх үйлдлийг тодорхойлъё.

Тодорхойлолт. (Матрицын нэмэх үйлдэл) Ижил хэмжээстэй 2 матрицыг нэмэхдээ ижил байрт байгаа элементүүдийг харгалзуулан нэмэх ба нийлбэр матриц нь нэмэгдэхүүн матрицуудтайгаа ижил хэмжээстэй байна.

Жишээ 1. $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ матрицын нийлбэрийг ол.

Бодолт. $A+B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+1 & 5+2 & 4+2 \\ 5+4 & 3+4 & 2+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 9 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

гэсэн матриц гарна. Мөн байрыг нь сольж нэмбэл

$$B+A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+2 & 2+5 & 2+4 \\ 4+5 & 4+3 & 3+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 9 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

гэсэн матриц гарч байна.
Бид өмнө нь a, b, c бодит тоонуудын хувьд

- $a + b$ нь бодит тоо байна
- $a + b = b + a$
- $(a + b) + c = a + (b + c)$

чанар биелнэ гэж үзсэн. Тэгвэл матрицын нэмэх үйлдэл нь мөн эдгээр чанаруудыг хангана. Өөрөөр хэлбэл аливаа A, B, C гэсэн ижилхэн $n \times k$ хэмжээстэй матрицын хувьд

- $A+B$ нь мөн $n \times k$ хэмжээстэй матриц байна
- $A+B=B+A$
- $(A+B)+C=A+(B+C)$

гэсэн чанар мөн биелдэг.

Тэг матриц

Бодит тооны нэмэх үйлдлийн хувьд аливаа a тоо авахад $a + b = b + a = a$ байх b тоог нэмэх үйлдлийн нэгж буюу **тэг** гээд **0**-ээр тэмдэглэдэг. Өөрөөр хэлбэл $a + 0 = 0 + a = a$ байдаг. Тэгвэл үүнтэй адил чанар матрицыг нэмэх үйлдэлд бий.

Чанар 1. Аливаа A матрицын хувьд $A + B = B + A = A$ байх B гэсэн A-тай ижил хэмжээстэй матриц байх ба түүнийг мөн тэг матриц гээд бодит тоотой ижлээр 0 гэж тэмдэглэнэ.

Матрицыг нэмэх үйлдлийн тодорхойлолтоос тэг матриц нь анхны матрицтай ижил хэмжээстэй дан тэг тооноос тогтох матриц байх нь мөрдөн гарна.

Жишээ 2.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & 1+0 \\ 3+0 & 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 & 0+2 \\ 0+2 & 0+3 \\ 0+3 & 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Санамж Тэг матрицын хэмжээс янз бүр байж болдог.

Эсрэг матриц

Бодит тооны нэмэх үйлдлийн хувьд аливаа a тоо авахад $a + b = b + a = 0$ байх b тоо олддог ба уг тоог a тооны **эсрэг тоо** гээд $b = -a$ гэж тэмдэглэдэг. Тэгвэл үүнтэй адилаар бид эсрэг матрицыг тодорхойлж болно.

Чанар 2. Аливаа A матрицын хувьд $A + B = B + A = 0$ байх B гэсэн матрицыг A-ийн эсрэг матриц гээд $B = -A$ гэж тэмдэглэдэг. Энд 0 нь тэг матриц.

Энэ B матрицын элементүүд нь A матрицын элементүүд болох тоонуудын эсрэг тоо нь байна. Тухайлбал, хэрэв $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ бол $-A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 4 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ байна.

Жишээ 3. Хэрэв $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ бол түүний эсрэг матрицыг ол.

Бодолт. Хэрэв түүний эсрэг матрицыг $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ гэвэл

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ болно.

Эндээс хоёр матриц тэнцүү байна гэдгээс $a_{11} + b_{11} = 0, a_{12} + b_{12} = 0, a_{21} + b_{21} = 0, a_{22} + b_{22} = 0$ болох тул $b_{11} = -a_{11}$, $b_{12} = -a_{12}$, $b_{21} = -a_{21}$, $b_{22} = -a_{22}$ гэж гарна.

Иймд $B = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix}$ боллоо.

Дурын бодит a,b тоонуудын хувьд a дээр b-ийн эсрэг тоог нэмэх үйлдлийг a-аас b-г хасах үйлдэл гээд $a+(-b)=a-b$ гэж тэмдэглэдэг. Үүнтэй адилаар аливаа A матриц дээр B матрицын эсрэг матрицыг нэмэх үйлдлийг A матрицаас B матрицыг хасах үйлдэл гэдэг ба $A+(-B)=A-B$ гэж тэмдэглэнэ.

Жишээ 4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ гэсэн матрицын ялгаврыг ол.

Бодолт.

$$A-B=A+(-B)=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-1 & 5-2 & 4-2 \\ 5-4 & 3-4 & 2-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

болно.

6. Цахилгаан барааны 1 дүгээр салбар дэлгүүр эхний өдөр 11 хөргөгч, 9 зурагт, хоёр дахь өдөр 12 хөргөгч, 10 зурагт, гурав дахь өдөр 9 хөргөгч 12 зурагт худалдсан бол 2 дугаар салбар дэлгүүр эхний өдөр 17 хөргөгч, 12 зурагт, хоёр дахь өдөр 15 хөргөгч, 14 зурагт, гурав дахь өдөр 16 хөргөгч, 10 зурагт худалджээ.

а. Энэ мэдээллийг A,B матрицаар илэрхийл.

б. A,B матрицын нийлбэрийг олж, нийлбэр матрицыг тайлбарла.

7. Үйлдлийг гүйцэтгэ.

а. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ б. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ в. $\begin{pmatrix} -7 & 5 & 9 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

8. $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ бол $A+B,\ B+A$ нийлбэрийг ол.

9. $A+B, B+A, A-B, B-A$ матрицуудыг ол.

а. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ б. $A = \begin{pmatrix} 13 & -5 & 11 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

10. $A+B, B+A, A-B, B-A$ матрицуудыг ол.

а. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ б. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Матрицыг тоогоор үржүүлэх үйлдэл

Хоёр ижил матрицыг хооронд нь нэмж нийлбэр матрицыг ажиглая.

Тухайлбал: Хэрэв $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ бол $A+A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}$,

$(A+A)+A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 6\\ 6 & 4 & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 3 & 9\\ 9 & 6 & 12\end{pmatrix}$ болно.

Эндээс A матрицыг 2 дахин нэмэх нь элемент бүрийг 2-оор үржүүлсэнтэй, 3 удаа нэмэх нь элемент бүрийг 3-аар үржүүлсэнтэй тэнцүү байна. Иймд бодит тоо a бүрийн хувьд $a+a=2a, a+a+a=3a$ байдагтай адилаар $A+A=2A, A+A+A=3A$ гэж үзвэл бид матрицыг тоогоор үржүүлэх үйлдлийг тодорхойлж болно.

Тодорхойлолт. k гэсэн бодит тоогоор A матрицыг үржүүлнэ гэдэг нь анхны матрицын элемент бүрийг k тоогоор үржүүлсэн матрицыг хэлнэ.

Тухайлбал $k\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\\ 4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2k & k\\ -k & 3k\\ 4k & -2k\end{pmatrix}$ болно.

Жишээ 1. $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & 7\\ 2 & 7 & 3\\ 5 & 2 & 4\end{pmatrix}$ матрицыг $\frac{1}{2}$-ээр үржүүлбэл $\frac{1}{2}A=\begin{pmatrix}1.5 & 2.5 & 3.5\\ 1 & 3.5 & 1.5\\ 2.5 & 1 & 2\end{pmatrix}$ гэсэн матриц гарна.

Жишээ 2. $3\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}-2X=\begin{pmatrix}3 & 1 & 3\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix}$ бол X матрицыг ол.

Бодолт. Тэнцэтгэлийн хоёр талд $2X$-ийг нэмбэл $3\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 3\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix}+2X$ болох ба $-\begin{pmatrix}3 & 1 & 3\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix}$ матрицыг мөн нэмбэл $3\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 1 & 3\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix}=2X$ болно. Эндээс

$2X=3\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 1 & 3\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 9 & -3\\ 6 & -6 & 9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 1 & 3\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}3-3 & 9-1 & -3-3\\ 6-4 & -6+2 & 9-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 8 & -6\\ 2 & -4 & 8\end{pmatrix}$ болох бөгөөд тэнцэтгэлийн хоёр талыг $\frac{1}{2}$ -ээр үржүүлбэл $X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 8 & -6\\ 2 & -4 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 4 & -3\\ 1 & -2 & 4\end{pmatrix}$ болно.

11. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\end{pmatrix}$ матриц өгөв. Тэгвэл а. $2A$ б. $-\frac{1}{4}A$ в. $\frac{4}{3}A$ матрицыг ол.

12. Үйлдлийг гүйцэтгэ.

а. $3\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ б. $\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ в. $2\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}$

13. Хэрэв $A=\begin{pmatrix}7 & 5\\ 0 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ матриц өгсөн бол дараах үйлдлийг гүйцэтгэ.

а. $(-3)A$ б. $\frac{1}{2}B$ в. $5(A-B)$ г. $2A-3B$

14. Хэрэв $3\begin{pmatrix}1 & x\\ y & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & y-2\\ 3x & -9\end{pmatrix}$ бол x ба y - ийг ол.

15. Хэрэв $2X+4\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 8 & 4\\ 4 & -2 & 10\end{pmatrix}$ бол X матрицыг ол.

16. Хэрэв $3\left(\begin{pmatrix}3 & 2 & -2\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}-X\right)+\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & -4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 6 & 5\\ 4 & -1 & 1\end{pmatrix}$ бол X матрицыг ол.

10.3. МАТРИЦЫН ҮРЖҮҮЛЭХ ҮЙЛДЭЛ

Дэлгүүрээр 3 өдрийн турш худалдсан барааны тоог хүснэгтэд үзүүлжээ.

Дэлгүүр	Зурагт	Хөргөгч
I өдөр	3	5
II өдөр	2	3
III өдөр	5	4

Хэрэв зурагт 650 000 төгрөг, хөргөгч 800 000 төгрөгийн үнэтэй бол эхний өдөр $3\cdot650\,000+5\cdot800\,000=5\,950\,000$ төгрөгийн орлого орсон байна.

Үүнийг матриц хэлбэрт эхний өдрийн $(3 \quad 5)$ мөрийг тус бүрийн үнэ болох $\begin{pmatrix}650000\\ 800000\end{pmatrix}$ баганаар үржүүлсэн байдлаар бичээд үр дүнг мөн хаалтад бичвэл

$$(3 \quad 5)\begin{pmatrix}650000\\ 800000\end{pmatrix}=(3\cdot650000+5\cdot800000)=(5950000)$$ болно.

Үүнтэй адилаар бодвол хоёр дахь өдөр:

$$(2 \quad 3)\begin{pmatrix}650000\\ 800000\end{pmatrix}=(2\cdot650000+3\cdot800000)=(3700000)$$

Гурав дахь өдөр:

$$(5 \quad 4)\begin{pmatrix}650000\\ 800000\end{pmatrix}=(5\cdot650000+4\cdot800000)=(5800000)$$ төгрөгийн орлого орсон байна.

Дэлгүүрийн нийт худалдсан барааг нэгтгэн нэг матрицаар илэрхийлээд өдөр бүрийн үнийн дүнг мөн нэг матриц болгон бичвэл $\underbrace{\begin{pmatrix}3 & 5\\ 2 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}}_{3\times2}\underbrace{\begin{pmatrix}650000\\ 800000\end{pmatrix}}_{2\times1}=\underbrace{\begin{pmatrix}5950000\\ 3700000\\ 5800000\end{pmatrix}}_{3\times1}$ болно (доод талд нь матрицын хэмжээсийг тус тус тэмдэглэсэн байна). Эндээс үндэслэн матрицуудын үржүүлэх үйлдлийг тодорхойлъё.

Дээрх жишээ дэх матрицууд болон тэдгээрийн хэмжээсийг ажиглавал матрицуудыг үржүүлэхийн тулд эхний матрицын баганын тоо дараагийн матрицын мөрийн тоотой тэнцүү байх ёстой ба харин үржүүлээд гарсан матриц нь эхний матрицын мөрийн тоотой тэнцүү мөртэй дараагийн матрицын баганын тоотой тэнцүү баганатай байна.

Эхний матрицын баганын тоо дараагийн матрицын мөрийн тоотой тэнцүү байдаг хоёр матрицыг үржүүлэхдээ эхний матрицын i дүгээр мөрийн элементүүдийг, дараагийн матрицын j дүгээр баганын элементүүдээр харгалзуулан үржүүлж хооронд нь нэмээд, үржвэр матрицын i дүгээр мөрийн j дүгээр баганад бичдэг.

Тухайлбал: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ матрицыг $\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$ матрицаар хэрхэн үржүүлэхийг авч үзье.

Үүний тулд эхний матрицын 1 дүгээр мөрийн элементүүдийг дараагийн матрицын 1 дүгээр баганын элементүүдээр харгалзуулан үржүүлж хооронд нь нэмээд 1 дүгээр мөрийн 1 дүгээр баганад бичнэ.

Харгалзуулан үржүүлж, нэмэх

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 & \\ & \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 11 = 58$$

Дараа нь эхний матрицын 1 дүгээр мөрийн элементүүдийг дараагийн матрицын 2 дугаар баганын элементүүдээр харгалзуулан үржүүлж хооронд нь нэмж, гарсан тоог 1 дүгээр мөрийн 2 дугаар баганад бичнэ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 & 64 \\ & \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 12 = 64$$

Дараа нь эхний матрицын 2 дугаар мөрийн элементүүдийг дараагийн матрицын 1 дүгээр баганын элементүүдээр харгалзуулан үржүүлж хооронд нь нэмж, гарсан тоог 2 дугаар мөрийн 1 дүгээр баганад бичнэ.

$$4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 11 = 139$$

Эцэст нь эхний матрицын 2 дугаар мөрийн элементүүдийг дараагийн матрицын 2 дугаар баганын элементүүдээр харгалзуулан үржүүлж хооронд нь нэмж гарсан тоог 2 дугаар мөрийн 2 дугаар баганад бичнэ.

$$4 \cdot 8 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 12 = 154$$

Иймд үржвэр матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{pmatrix}$$

боллоо.

Санамж A, B гэсэн матрицын үржүүлэх үйлдлийг $A \cdot B$ эсвэл AB гэж тэмдэглэнэ.

Жишээ 1. Матрицын үржүүлэх үйлдлийг гүйцэтгэ.

а. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ б. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Бодолт. а. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \end{pmatrix}$ б. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-2) + 2\cdot 3 + 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \end{pmatrix}$

Энэ жишээг ажиглавал мөр матрицыг багана матрицаар үржүүлэх нь хоёр векторын скаляр үржвэрийг бодохтой ижил байна.

Жишээ 2. Матрицын үржүүлэх үйлдлийг гүйцэтгэ.

а. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ б. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ в. $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Бодолт.

а. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + (-1)\cdot 1 \\ 3\cdot 2 + 2\cdot 1 \\ 1\cdot 2 + 0\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$

б. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + 1\cdot 1 + 3\cdot 4 & 2\cdot 1 + 1\cdot 4 + 3\cdot 2 \\ 3\cdot 2 + 2\cdot 1 + 4\cdot 4 & 3\cdot 1 + 2\cdot 4 + 4\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 12 \\ 24 & 19 \end{pmatrix}$

в. $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cdot 1 & -2\cdot 2 & -2\cdot 3 \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 2 & 3\cdot 3 \\ 1\cdot 1 & 1\cdot 2 & 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Жишээ 3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ үржвэрийг ол.

Бодолт.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + 1\cdot 3 & 2\cdot 1 + 1\cdot 2 & 2\cdot 3 + 1\cdot 4 \\ 1\cdot 2 + 4\cdot 3 & 1\cdot 1 + 4\cdot 2 & 1\cdot 3 + 4\cdot 4 \\ 4\cdot 2 + 2\cdot 3 & 4\cdot 1 + 2\cdot 2 & 4\cdot 3 + 2\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 10 \\ 14 & 9 & 19 \\ 14 & 8 & 20 \end{pmatrix}$$

17. Өгсөн матрицуудыг үржүүлж болох уу?

а. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ б. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}$ в. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ г. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

18. Матрицын үржүүлэх үйлдлийг гүйцэтгэ.

а. $(4-2)\begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ б. $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}(2-1)$

в. $\begin{pmatrix}3 & -2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ г. $\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2 & -4\end{pmatrix}$

19. Матрицын үржүүлэх үйлдлийг гүйцэтгэ.

а. $\begin{pmatrix}-3 & -4\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ б. $\begin{pmatrix}3 & -2\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{pmatrix}$ в. $\begin{pmatrix}11 & 12\\14 & 13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Тайлбар Хэрэв a нь бодит тоо бол $a\cdot a$-ийг a^2, $a\cdot a\cdot a$-ийг a^3 гэж тэмдэглэдэгтэй адилаар матрицын үржүүлэх үйлдлийн хувьд мөн $A\cdot A$ -ийг A^2, $A\cdot A\cdot A$ -ийг A^3 гэж тэмдэглэнэ.

20. Хэрэв $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$ бол A^2, A^3 -ийг тус тус ол.

21. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\0 & 4 & -2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-3 & 1\\2 & 5\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\4 & -3 & 1\\-2 & 3 & 5\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}3 & -2\\0 & -1\\1 & 2\end{pmatrix}$ матриц өгөв**.** Тэгвэл дараах үйлдлийг гүйцэтгэж, үр дүнд гарсан матрицын хэмжээсийг ол.

а. BA б. AC в. $C + DA$ г. $3AD - 2B$ д. C^2

Бодит тооны олонлогт үржүүлэх үйлдлийн хувьд үржигдэхүүний байрыг солиход үржвэр өөрчлөгдөхгүй гэсэн чанар байдаг. Өөрөөр хэлбэл аливаа a,b гэсэн бодит тоонуудын хувьд $a\cdot b=b\cdot a$ байдаг. Гэтэл Жишээ 2.б болон Жишээ 3-ын хариуг ажиглавал ялгаатай матриц гарч байгаа тул матрицын үржүүлэх үйлдлийн хувьд байр солих хууль үргэлж биелэхгүйг харж болно.

Санамж Аливаа A,B матрицуудын хувьд $AB = BA$ байх албагүй. A матрицыг B матрицаар үржүүлэхийн тулд A-ийн баганын тоо B-ийн мөрийн тоотой тэнцүү байх ёстой. Харин B матрицыг A матрицаар үржүүлэхийн тулд B-ийн баганын тоо A-ийн мөрийн тоотой тэнцүү байх ёстой. Гэтэл энэ нь үргэлж тийм байх албагүй. Мөн үржүүлж болж байсан ч үржвэр матрицын хэмжээснүүд өөр байж болдог.

Дараах жишээнд үржүүлээд гарч байгаа матрицын хэмжээснүүд ижил боловч ялгаатай матрицууд гарч болохыг үзүүлэв.

Жишээ 4. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 0\\1 & 2\end{pmatrix}$ матриц өгөв. AB, BA үржвэрийг олоорой.

$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot2+2\cdot1 & 1\cdot0+2\cdot2\\3\cdot2+4\cdot1 & 3\cdot0+4\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 4\\10 & 8\end{pmatrix}$ болох ба

$BA=\begin{pmatrix}2 & 0\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot1+0\cdot3 & 2\cdot2+0\cdot4\\1\cdot1+2\cdot3 & 1\cdot2+2\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\7 & 10\end{pmatrix}$ болно.

Мөн байрыг нь сольж үржүүлэхэд үржвэр нь ижил байдаг матрицууд бий.

Жишээ 5. $A=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ ба $B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ гэсэн матрицуудын хувьд байр солих чанар биелнэ гэж харуул.

Бодолт.

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 2+6\cdot(-1) & 1\cdot(-3)+6\cdot 1\\ 2\cdot 2+3\cdot(-1) & 2\cdot(-3)+3\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 1 & -3\end{pmatrix}$$ болох ба

$$BA=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 6\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 1+(-3)\cdot 2 & 2\cdot 6+(-3)\cdot 3\\ -1\cdot 1+1\cdot 2 & -1\cdot 6+1\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 1 & -3\end{pmatrix}$$ болно.

22. Хэрэв $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -5 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 6\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ матриц өгсөн бол үржүүлэх үйлдлийг гүйцэтгэ.

а. AB б. BA

23. Хэрэв $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$ гэсэн матриц өгсөн бол үржүүлэх үйлдлийг гүйцэтгэ.

а. AB б. BA

24. $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ гэсэн матриц өгөв. Дараах үйлдлийг гүйцэтгэ.

а. AB б. $A(B+C)$ в. $(2B-C)(A+B)$ г. $A\,(BC)$

25. Хэрэв $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ бол дараах үйлдлийг гүйцэтгэ.

а. $2A^2-3A$ б. A^3+A^2-2A

10.4. НЭГЖ МАТРИЦ

Бодит тооны үржүүлэх үйлдлийн хувьд аливаа a тоо авахад $a\cdot b=b\cdot a=a$ байх b тоог үржүүлэх үйлдлийн нэгж буюу **нэг** гээд **1**-ээр тэмдэглэдэг. Өөрөөр хэлбэл $a\cdot 1=1\cdot a=a$ байдаг. Тэгвэл үүнтэй төстэй чанар матрицыг үржүүлэх үйлдэлд бий.

Тодорхойлолт. Аливаа A гэсэн 2 × 2 хэмжээстэй матрицын хувьд $A\cdot E=E\cdot A=A$ байх E гэсэн матриц олддог ба уг матрицыг 2 × 2 хэмжээстэй нэгж матриц гэнэ.

$A\cdot E=A$ гэсэн нөхцөлөөс гарах тэгшитгэлийн системүүдийг бодвол $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ гэж олддог.

Жишээ 1.

$\begin{pmatrix}2 & -3\\ 5 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ үржүүлэх үйлдлийг гүйцэтгэ.

Бодолт. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot1+(-3)\cdot0 & 2\cdot0+(-3)\cdot1 \\ 5\cdot1+7\cdot0 & 5\cdot0+7\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ болно.

Жишээ 2. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ үржүүлэх үйлдлийг гүйцэтгэ.

Бодолт. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+3\cdot0 & 1\cdot0+3\cdot1 \\ 1\cdot1+2\cdot0 & 1\cdot0+2\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Жишээ 3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ үржүүлэх үйлдлийг гүйцэтгэ.

Бодолт. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot1+1\cdot0 & 2\cdot0+1\cdot1 \\ 1\cdot1+4\cdot0 & 1\cdot0+4\cdot1 \\ 4\cdot1+2\cdot0 & 4\cdot0+2\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

Жишээ 4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ үржүүлэх үйлдлийг гүйцэтгэ.

Бодолт. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot2+0\cdot1+0\cdot4 & 1\cdot1+0\cdot4+0\cdot2 \\ 0\cdot2+1\cdot1+0\cdot4 & 0\cdot1+1\cdot4+0\cdot2 \\ 0\cdot2+0\cdot1+1\cdot4 & 0\cdot1+0\cdot4+1\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

26. Үржүүлэх үйлдлийг гүйцэтгэ.

а. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

б. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

в. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

г. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

27. Үржүүлэх үйлдлийг гүйцэтгэ.

а. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

б. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

28. Хэрэв $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ба E нь нэгж матриц бол дараах үйлдлийг гүйцэтгэ.

а. $A^2 - 4A + 4E$

б. $A^3 + 2A^2 - 2A - E$

10.5. МАТРИЦЫН ТОДОРХОЙЛОГЧ

Мөр ба баганын тоо нь тэнцүү матрицад тодорхойлогч гэх тоог харгалзуулж болдог.

Тодорхойлолт. 2 × 2 хэмжээстэй $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ матрицын хувьд $ad-bc$ тоог уг матрицын **тодорхойлогч** гэх ба $|A|$ буюу $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ гэж тэмдэглэнэ. Өөрөөр хэлбэл $|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$ болох ба матрицын тодорхойлогчийг матрицаас ялгаж шулуун зураасаар хашиж тэмдэглэнэ.

Жишээ 1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ матрицын тодорхойлогчийг бод.

Бодолт. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2\cdot 2-1\cdot 3=1$

29. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ матрицын тодорхойлогчийг ол.

30. $A=\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 11 & 7 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ матрицын тодорхойлогчийг ол.

Чанар 1. Матрицын аль нэг мөр эсвэл багана дан тэгээс тогтдог бол уг матрицын тодорхойлогч нь тэг гарна.

Чанар 2. Матрицын аль нэг мөрийг (баганыг) тоогоор үржүүлэхэд өөр нэг мөртэй (баганатай) тэнцүү байдаг бол уг матрицын тодорхойлогч тэг гарна.

Жишээ 2. $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ ба $\begin{pmatrix} 14 & 8 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ матрицын тодорхойлогчийг ол.

Бодолт. $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=0\cdot 4-3\cdot 0=0, \begin{vmatrix} 14 & 8 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}=14\cdot 4-8\cdot 7=56-56=0.$

31. $A=\begin{pmatrix} 15 & 13 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ матрицуудын тодорхойлогчийг ол.

32. $A=\begin{pmatrix} 15 & 18 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 25 & 15 \end{pmatrix}$ матрицуудын тодорхойлогчийг ол.

Чанар 3. Тодорхойлогчийн аль нэг мөрийн (баганын) ерөнхий үржигдэхүүнийг тодорхойлогчийн өмнө гаргаж болно.

Жишээ 3. $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ ба $B=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ матрицын тодорхойлогчийг ол.

Бодолт. $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 5\cdot 6 - 2\cdot 3 = 30 - 6 = 24$ болох ба $|B| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5\cdot 2 - 2\cdot 1 = 10 - 2 = 8$ болно. Эндээс $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3|B|$ байх нь харагдаж байна.

Жишээ 4. $\begin{vmatrix} 27 & -9 \\ -24 & 8 \end{vmatrix}$ тодорхойлогч бод.

Бодолт.

$$A = \begin{vmatrix} 27 & -9 \\ -24 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9\cdot 3 & 9\cdot(-1) \\ 8\cdot(-3) & 8\cdot 1 \end{vmatrix} = 9\cdot 8\cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 72\begin{vmatrix} 3\cdot 1 & -1 \\ 3\cdot(-1) & 1 \end{vmatrix} = 72\cdot 3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 216\big(1\cdot 1 - (-1)\cdot(-1)\big) = 216\cdot 0 = 0$$

Чанар 4. Ижил хэмжээстэй квадрат матрицуудын үржвэр матрицын тодорхойлогч нь тус бүрийн тодорхойлогчийн үржвэртэй тэнцүү байна. Өөрөөр хэлбэл $|AB| = |A|\cdot|B|$ байна.

Санамж Дээрх чанараас үндэслээд $|AB| = |BA|$ гэж гарна. Өөрөөр хэлбэл хоёр матрицын байрыг нь сольж үржүүлэхэд ялгаатай матрицууд гардаг боловч тэдгээрийн тодорхойлогч нь тэнцүү байна.

Жишээ 5. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ ба $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ бол *A, B, AB, BA* матрицуудын тодорхойлогчийг ол.

Бодолт.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 4 - (-1)\cdot(-3) = 8 - 3 = 5,\ |B| = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 1 - 3\cdot(-5) = -2 - (-15) = 13$$

болно. Харин $AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-2) + (-1)\cdot(-5) & 2\cdot 3 + (-1)\cdot 1 \\ -3\cdot(-2) + 4\cdot(-5) & -3\cdot 3 + 4\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -14 & -5 \end{pmatrix}$

боллоо. Иймд $|AB| = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -14 & -5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-5) - 5\cdot(-14) = 65$ болж $|AB| = |A|\cdot|B|$ байх нь харагдаж байна.

Мөн $BA = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cdot 2 + 3\cdot(-3) & -2\cdot(-1) + 3\cdot 4 \\ -5\cdot 2 + 1\cdot(-3) & -5\cdot(-1) + 1\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 14 \\ -13 & 9 \end{pmatrix}$ болох учир

$|BA| = \begin{vmatrix} -13 & 14 \\ -13 & 9 \end{vmatrix} = -13\cdot 9 - 14\cdot(-13) = 65$ болж мөн $|BA| = |A|\cdot|B|$ байх нь харагдлаа.

33. $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ ба $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ бол

а. *AB* ба *BA* матрицын тодорхойлогчийг ол.

б. $(A - B)(A + B)$ ба $(2B + A)(2B - A)$ матрицын тодорхойлогчийг ол.

34. $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ бол дараах матрицын тодорхойлогчийг ол.

а. $A^2-4A+4E$ б. A^3+2A^2-2A-E

35. $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ гэсэн матрицууд өгөв. Дараах матрицын тодорхойлогчийг ол.

а. AB б. $A(B+C)$ в. $(2B-C)(A+B)$ г. $A(BC)$

10.6. УРВУУ МАТРИЦ

Аливаа тэгээс ялгаатай a бодит тооны хувьд $ab=ba=1$ байх b too үргэлж олдох бөгөөд уг тоог a тооны урвуу тоо гээд a^{-1} гэж тэмдэглэдэг.

Тухайлбал: $a=\frac{1}{4}$ бол $b=4$ нь a тооны урвуу тоо болно. Үүнтэй төстэй чанар матрицуудын үржүүлэх үйлдлийн хувьд байдаг.

Жишээ 1. Хэрэв $A=\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{pmatrix}$ ба $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ матриц өгсөн бол AB, BA матрицуудыг ол.
Бодолт.

$AB=\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ба $BA=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ болно.

Тодорхойлолт. Хэрэв A матрицын хувьд $AB=BA=E$ (нэгж матриц) байх B матриц олддог бол B матрицыг A матрицын **урвуу матриц** гэх бөгөөд A^{-1} гэж тэмдэглэнэ.

Өмнөх жишээ дээр авч үзсэн A ба B матрицын хувьд $AB=E$ ба $BA=E$ нөхцөл биелж байгаа тул B нь A матрицын урвуу матриц болох буюу $B=A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ байна.

Дүгнэлт. Хэрэв A матрицын урвуу нь B матриц бол A нь B матрицын урвуу матриц байна.

Жишээ 2. $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ матриц урвуу матрицтай юу?

Бодолт. Үүний тулд эхлээд $AB=E$ нөхцөлийг хангах B матрицыг олъё.

$B=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ гэж үзвэл $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ болох ба эндээс $\begin{pmatrix}3x+z & 3y+t\\ x+z & y+t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ болж хоёр матриц тэнцүү гэдгээс $\begin{cases}3x+z=1\\ x+z=0\end{cases}$ ба $\begin{cases}3y+t=0\\ y+t=1\end{cases}$ гэсэн хоёр шугаман тэгшитгэлийн систем үүснэ. Үүнийг бодож x, z, y, t-г олбол $x=\frac{1}{2}, y=-\frac{1}{2}, z=-\frac{1}{2}, t=\frac{3}{2}$ гэж гарна.

Эндээс $B=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ болов.

Мөн $BA=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$ болно. Иймээс $AB = BA = E$ нөхцөлийг хангах $B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ матриц олдож байгаа тул A матрицын урвуу матриц нь $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ байна.

Жишээ 3. $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}$ матриц урвуу матрицтай юу?

Бодолт. Жишээ 2-ыг бодсон аргаар бодъё.

$B=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ гэвэл $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ буюу $\begin{pmatrix}2x+3z & 2y+3t\\ 4x+6z & 4y+6t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ болох тул хоёр матрицын тэнцүү байх нөхцөлөөс $\begin{cases}2x+3z=1\\ 4x+6z=0\end{cases}$ ба $\begin{cases}2y+3t=0\\ 4y+6t=1\end{cases}$ гэсэн шугаман тэгшитгэлийн системүүдийг бодох бодлогод шилжинэ.

Эхний систем нь 2 = 0, хоёр дахь систем нь 0 = 1 гэсэн худал тэнцэтгэлд хүрэх тул эдгээр тэгшитгэлийн систем шийдгүй байна. Өөрөөр хэлбэл $AB = E$ нөхцөлийг хангах B матриц олдохгүй байна. Нөгөө талаас $BA = E$ нөхцөлийг хангах B матриц мөн адил олдохгүй. Иймд $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}$ матрицад урвуу матриц олдохгүй байна. Энэ матрицын тодорхойлогчийг бодож үзвэл $|A|=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}=2\cdot 6-3\cdot 4=0$ буюу тодорхойлогч нь 0 байна.

$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ ба a, b, c, d нь бодит тоонууд байг. A матрицын урвууг олох томьёог олж, ямар матрицад урвуу олдох вэ гэдгийг судалъя.

A матрицыг урвуутай гэж үзээд $A^{-1}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ гэвэл $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ буюу $\begin{pmatrix}ax+bz & ay+bt\\ cx+dz & cy+dt\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ болох тул $\begin{cases}ax+bz=1\\ cx+dz=0\end{cases}$ ба $\begin{cases}ay+bt=0\\ cy+dt=1\end{cases}$ тэгшитгэлийн системээс x, z, y, t-г олно.

Эхний тэгшитгэлийн системээс хэрэв $ad-bc\neq 0$ бол $x=\frac{d}{ad-bc}$, $z=\frac{-c}{ad-bc}$ гэж гарах

ба дараагийн тэгшитгэлийн системээс мөн хэрэв $ad-bc\neq 0$ бол $y=\dfrac{-b}{ad-bc}$, $t=\dfrac{a}{ad-bc}$

гэж тус тус олдоно. Эндээс $ad-bc\neq 0$ бол

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc}\\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc}\end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

гэж олдож байна. Өөрөөр хэлбэл $ad-bc\neq 0$ бол $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$ гэж гарна.

Дүгнэлт. Хэрэв $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ матрицын тодорхойлогч буюу $|A|=ad-bc$ нь тэгээс ялгаатай бол түүний урвуу $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$ томьёогоор олно. Харин A матрицын тодорхойлогч нь тэгтэй тэнцүү бол түүнд урвуу матриц байхгүй.

Жишээ 4. $\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\ 1\end{pmatrix}$ гэсэн матрицан тэгшитгэлийг бод.

Бодолт. Энэ тэгшитгэлийг бодохын тулд $\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ матрицын урвууг олоод, түүгээр тэнцүүгийн тэмдгийн хоёр талыг зүүн талаас нь үржүүлэх хэрэгтэй. (*Энд матрицын үржүүлэх үйлдэл байр солих чанар биелэхгүй гэдгийг санах хэрэгтэй.*)

Үүний тулд тодорхойлогчийг бодвол $\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=(-2)\cdot(-1)-3\cdot 1=-1$ болно. Эндээс $\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix}-1 & -3\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ болно. Иймд $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\ 1\end{pmatrix}$ буюу $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\ 1\end{pmatrix}$ болох ба эндээс $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 7+3\cdot 1\\ 1\cdot 7+2\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\ 9\end{pmatrix}$ болно.

Жишээ 5. Хэрэв $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ бол $AX=B$ гэсэн матрицан тэгшитгэлийг бод.

Бодолт. Энэ тэгшитгэлийг бодохын тулд A матрицын урвууг олоод, түүгээр тэнцүүгийн тэмдгийн хоёр талыг зүүн гар талаас нь үржүүлэх хэрэгтэй.

Үүний тулд тодорхойлогчийг бодвол $\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{vmatrix}=3\cdot 3-2\cdot 4=1$ болно.

Эндээс $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{1}\begin{pmatrix}3 & -2\\ -4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -4 & 3\end{pmatrix}$ болно.

Иймд $\begin{pmatrix}3 & -2\\ -4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ буюу $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

байх ба эндээс $X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2+(-2)\cdot(-1) & 3\cdot 3+(-2)\cdot 2 \\ -4\cdot 2+3\cdot(-1) & -4\cdot 3+3\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -11 & -6 \end{pmatrix}$ болно.

36. Жишээ 2-ыг томьёо ашиглан бод.

37. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ матриц урвуутай эсэхийг тогтоо. Хэрэв тийм бол урвуу матрицыг ол.

38. $C = \begin{pmatrix} 15 & 18 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ матриц урвуутай эсэхийг тогтоож, хэрэв урвуутай бол урвуу матрицыг ол.

39. Хэрэв $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ бол

а. D матриц урвуутай эсэхийг тогтоо. Хэрэв тийм бол урвуу матрицыг ол.
б. $2D$ матриц урвуутай юу? Хэрэв урвуутай бол урвуу матрицыг ол.
в. $-3D$ матриц урвуутай юу? Хэрэв урвуутай бол урвуу матрицыг ол.
г. $0 \cdot D$ матриц урвуутай юу? Хэрэв урвуутай бол урвуу матрицыг ол.

40. Хэрэв $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ ба $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$ бол

а. A матриц урвуутай эсэхийг тогтоо. Хэрэв урвуутай бол урвуу матрицыг ол.
б. B матриц урвуутай эсэхийг тогтоо. Хэрэв урвуутай бол урвуу матрицыг ол.
в. $A^{-1}B^{-1}$ ба $B^{-1}A^{-1}$ матрицыг ол.
г. AB матриц урвуутай эсэхийг тогтоо. Хэрэв урвуутай бол урвуу матрицыг ол.
д. BA матриц урвуутай эсэхийг тогтоо. Хэрэв урвуутай бол урвуу матрицыг ол.

41. Дараах матрицан тэгшитгэлийг бод.

а. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ б. $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$

42. Хэрэв $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ бол $XA = B$ гэсэн матрицан тэгшитгэлийг бод.

43. $\left(2\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - X\right)\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ гэсэн матрицан тэгшитгэлийг бод.

БҮЛГИЙН НЭМЭЛТ ДААЛГАВАР

1. Зайрмагийн цех баасан гарагт жимстэй зайрмаг 40, цөцгийтэй зайрмаг 30, аарцтай зайрмаг 40-ийг бямба гарагт жимстэй зайрмаг 20, цөцгийтэй зайрмаг 20, аарцтай зайрмаг 10-ыг тус тус худалдсан гэсэн мэдээлэл өгөв.

а. Дээрх мэдээллийг хүснэгтээр илэрхийл.
б. Энэ мэдээллийг A_{2x3} матрицаар илэрхийл.
в. A матрицын a_{13}, a_{21}, a_{23} элементийг ол.
г. $A = B$ бол $-3b_{11} + 2b_{22}$ илэрхийллийн утгыг ол.

2. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ матриц өгөв. Хэрэв $B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\end{pmatrix}$ матриц бол

а. A матрицтай тэнцүү B матрицын хэмжээсийг бичнэ үү.
б. $A = B$ гэдгийг ашиглан $b_{13}\cdot y-5\cdot b_{21}=-13$ тэгшитгэлийг бод.
в. $\begin{pmatrix}b_{12} & b_{23} & b_{11}\end{pmatrix}$ матрицын хэмжээс болон элементийг олно уу.

3. а. $\begin{pmatrix}14 & 12\\ 15 & 15\\ 16 & 17\end{pmatrix}$ б. $\begin{pmatrix}8 & 6 & 4\\ 9 & 5 & 4\end{pmatrix}$ матрицын хэмжээсийг олж матрицад тохирох мэдээлэл зохио.

4. Хэрэв $\begin{pmatrix}y-3\\ y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ бол x,y тоог ол.

5. $4\begin{pmatrix}x+2 & 2\\ 1 & y-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 8\\ 4 & 6\end{pmatrix}$ байх x,y тоог ол.

6. Хэрэв $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}5 & 1\\ -3 & 4\end{pmatrix}$ матриц өгсөн бол дараах матрицыг ол.

а. $-2B$ б. $\frac{1}{3}A$ в. $A + 2B$ г. $2A - 3B$ д. $-3A+\frac{1}{2}B$

7. Хэрэв $2X-4\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 6 & 4\\ 4 & 8\end{pmatrix}$ бол X матрицыг ол.

8. Дараах матрицыг үржүүлж болох уу? Хэрэв үржүүлж болох бол үржвэр матриц ба түүний хэмжээсийг ол.

а. $\begin{pmatrix}6 & 1.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\ 8\end{pmatrix}$ б. $\begin{pmatrix}10 & 8\\ 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -4\end{pmatrix}$ в. $\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ -2\\ -1\end{pmatrix}$ г. $\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 4 & -4\end{pmatrix}$

9. Матрицын үржүүлэх үйлдлийг гүйцэтгэ.

а. $\begin{pmatrix}3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$ б. $\begin{pmatrix}2 & -3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\ 2\\ -2\end{pmatrix}$

в. $\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}$ г. $\begin{pmatrix}-2 & 5\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 4 & -1\end{pmatrix}$

10. Хэрэв $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ матриц өгсөн бол үржүүлэх үйлдлийг гүйцэтгэ.

а. AB б. BA

11. Хэрэв $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}$ гэсэн матриц өгсөн бол үржүүлэх үйлдлийг гүйцэтгэ.

а. AB б. BA

12. $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ гэсэн матриц өгөв. Дараах үйлдлийг гүйцэтгэ.
а. AC б. $C(B+A)$ в. $(2B-3C)(A-C)$ г. $A(BC)-(AB)C$

13. Хэрэв $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ бол дараах үйлдлийг гүйцэтгэ. E нь нэгж матриц.

а. $3A^2-4A+E$ б. $A^3-3A^2+2A-4E$

14. Хэрэв $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ ба $B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ бол
а. A ба B матрицын тодорхойлогчийг ол.
б. $A - B$ ба $3B + A$ матрицын тодорхойлогчийг ол.

15. Хэрэв $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ бол дараах матрицын тодорхойлогчийг ол.

а. A^2+A-2E б. A^3-A^2-2A

16. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ гэсэн матриц өгөв. Дараах матрицын тодорхойлогчийг ол.
а. $A(B+C)$ б. $(2B-C)(A+B)$

17. $A=\begin{pmatrix}17 & 4\\ 13 & 3\end{pmatrix}$ матриц урвуутай эсэхийг тогтоо. Хэрэв урвуутай бол урвуу матрицыг ол.

18. Хэрэв $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}$ ба $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -5 & 11\end{pmatrix}$ бол өгсөн матрицын урвуу матриц орших эсэхийг тогтоо. Хэрэв урвуутай бол урвуу матрицыг ол.
а. $A, B, A+B, 2A-B$ б. $AB, BA, AB+BA$

19. Дараах матрицан тэгшитгэлийг бод.
а. $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ б. $\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13 & 5\\ 5 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2\end{pmatrix}$

20. Хэрэв $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}$ бол а. $XA=B$ б. $BX=A$ гэсэн матрицан тэгшитгэлийг бод.

21. $\left(X+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}13 & 8\\ 5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ матрицан тэгшитгэлийг бод.

22. $\begin{pmatrix}3 & 4\\ -2 & 5\end{pmatrix}\left(X+3\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ матрицан тэгшитгэлийг бод.

XI БҮЛЭГ. ГЕОМЕТРИЙН ХУВИРГАЛТ

Энэ бүлэг сэдвийг судалснаар дараах мэдлэг, чадварыг эзэмшинэ.

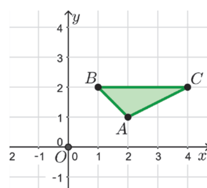
- *Координатын хавтгайд дараах хувиргалтуудыг хийх, координатын хувиргалтын томьёог гаргах, хэрэглэх:*
  - $x=a, y=b, y=x, y=-x$ *шулууны хувь дахь тэгш хэм*
  - *Өгсөн цэгийн хувь дахь тэгш хэм*
  - *Өгсөн цэгт төвтэй* $90^0, 180^0, -90^0$ *өнцгөөр эргүүлэх эргүүлэлт*
  - *Параллел зөөлт*
  - *Гомотетын төв, коэффицентийг олох, хавтгайн хялбар дүрсийг өгсөн (эерэг, сөрөг) коэффиценттэй гомотетоор хувиргах*
- *Дараах хувиргалтыг матрицаар илэрхийлэх*
  - $x=0, y=0, y=x, y=-x$ *шулууны хувь дахь тэгш хэм*
  - *Координатын эхийн хувь дахь тэгш хэм*
  - *Координатын эх дээр төвтэй* $90^0, 180^0, -90^0$ *өнцгөөр эргүүлэх эргүүлэлт*
  - *Координатын эх дээр төвтэй (эерэг, сөрөг) коэффиценттэй гомотет*

11.1. КООРДИНАТЫН ХАВТГАЙ ДАХЬ ХУВИРГАЛТ

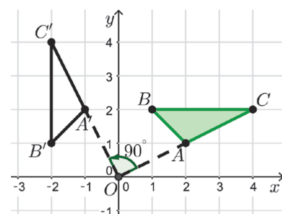
Өмнөх ангид эргүүлэлт, тэгш хэм, параллел зөөлт, гомотет гэх мэт хавтгай дээрх хувиргалтуудыг судалсан. Энэ бүлэгт эдгээр хувиргалтын матрицыг зохиох, хэрэглэхийг судална.

Хэрэв хавтгай дээрх хувиргалтаар P цэг P' цэгт шилжсэн бол P' цэгийг P цэгийн **дүр** гэнэ. Хувиргалтаар гарах дүр нь өөрөө байх цэгийг **үл хөдлөх цэг** гэнэ. F дүрсийн бүх цэгийн дүрийн олонлог болох F' дүрсийг F **дүрсийн дүр** гэнэ.

Жишээ 1. ABC гурвалжныг координатын эх дээр төвтэй цагийн зүүний эсрэг $90°$ өнцгөөр эргүүлэх эргүүлэлтээр гарах дүрийг зур.



Бодолт. Гурвалжны орой бүрийн дүрийг хэрхэн байгуулахыг тайлбарлая. A оройн дүрийг байгуулахын тулд A оройг эргүүлэлтийн төв O цэгтэй холбосон хэрчмийг зурна. AO хэрчмийг O цэгт төвтэй цагийн зүүний эсрэг $90°$ өнцгөөр эргүүлэхэд үүсэх хэрчмийн O цэгээс ялгаатай төгсгөлийн цэгийг A оройн дүр гэх ба A' гэж тэмдэглэе. Үүнтэй адилаар B, C оройн дүрийг байгуулна. Зурагт ABC гурвалжны дүр $A'B'C'$-ийг дүрслэв.

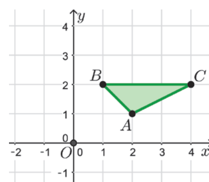


$P(x,y)$ цэгийн дүр $P'(x',y')$-ийн координатыг $\begin{cases} x' = ax+by \\ y' = cx+dy \end{cases}$ томьёогоор олох хувиргалтыг авч үзье. Өөрөөр хэлбэл (x,y) координаттай цэгийг $(ax+by, cx+dy)$ координаттай цэгт шилжүүлэх хувиргалт гэсэн үг. Тэгвэл $\begin{cases} x' = ax+by \\ y' = cx+dy \end{cases}$ томьёог **хувиргалтын томьёо** гэдэг. Дээрх хувиргалтын томьёог

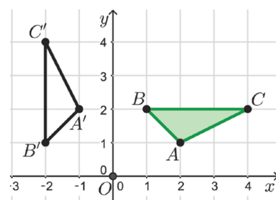
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ гэж бичье. Матрицын үржүүлэх үйлдлээс $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ гэж гарах учир хувиргалтын томьёог $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ хэлбэрээр бичиж болно. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ матрицыг **хувиргалтын матриц** гэнэ.

Хэрэв хувиргалтын матриц нь $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ бол хувиргалтын томьёо нь $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ буюу $\begin{cases} x' = ax+by \\ y' = cx+dy \end{cases}$ болох нь харагдаж байна.

Жишээ 2. Зурагт өгсөн ABC гурвалжныг $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ хувиргалтын матрицтай хувиргалтаар хувиргаж дүрийг ол.



Бодолт. Зургаас ABC гурвалжны оройн координат $A(2,1), B(1,2), C(4,2)$ болно. Харин хувиргалтын матриц нь $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ тул хувиргалтын томьёо нь $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ байна. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ томьёогоор $A(2,1), B(1,2), C(4,2)$ оройн дүрийг олъё. $A(2,1)$ оройн *x, y* координатыг хувиргалтын

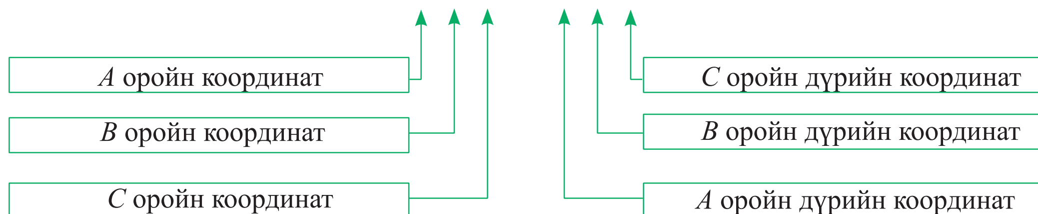


томьёонд орлуулахад $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ тул A оройн дүр $A'(-1,2)$. Үүнтэй адилаар $B(1,2)$ оройн дүр нь $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ тул $B'(-2,1)$. $C(4,2)$ оройн дүр нь $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ тул $C'(-2,4)$ гэж гарна. Зурагт ABC гурвалжны дүр $A'B'C'$-ийг дүрслэв. Эндээс $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ матрицтай хувиргалт нь O цэгт төвтэй цагийн зүүний эсрэг 90° өнцгөөр эргүүлэх эргүүлэлттэй адил байна. Урвуугаар O цэгт төвтэй цагийн зүүний эсрэг 90° өнцгөөр эргүүлэх эргүүлэлтийн матриц нь $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ болохыг 161 дүгээр хуудасны Жишээ 3-д харуулсан.

Хувиргалтын матрицаар дүрсийг хувиргах нэгэн аргыг тайлбарлая. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

хувиргалтын матрицаар Жишээ 2-ын ABC гурвалжныг хувиргахын тулд $A(2,1)$ оройн координатыг 1дүгээр баганад, $B(1,2)$ оройн координатыг 2 дугаар баганад, $C(4,2)$ оройн координатыг 3 дугаар баганад байрлуулсан $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ матриц зохиож, энэ матрицаар хувиргалтын матрицыг үржүүлэхэд гарах матрицаас ABC гурвалжны дүрийн оройн координатыг олж болно.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$



$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ гэсэн матрицтай хувиргалт авч үзье.

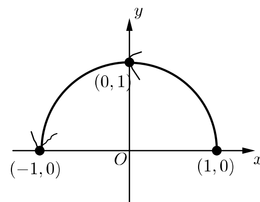
Хувиргалтын томьёо нь $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ болох ба үүнийг ашиглан (1, 0) ба (0, 1) координаттай цэгийн дүрийг олъё.

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ тул (1, 0) цэгийн дүр нь (a, c),

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ тул (0, 1) цэгийн дүр нь (b, d) болно. Эндээс хувиргалтын матриц зохиох дараах дүрмийг томьёолж болно.

Хувиргалтын матрицыг зохиох дүрэм: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ томьёотой хувиргалтын хувьд a, b, c, d тоонууд нь үл мэдэгдэх байг. Тэгвэл хувиргалтын матриц зохиохын тулд (1, 0) цэгийг хувиргахад гарах дүрээс a, c тоог олно, (0, 1) цэгийг хувиргахад гарах дүрээс b, d тоог олно. Хувиргалтын матрицаа $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ гэж бичнэ.

Жишээ 3. Координатын эх дээр төвтэй цагийн зүүний эсрэг 90° өнцгөөр эргүүлэх эргүүлэлтийн матриц зохио.



Бодолт. Хувиргалтын матрицыг зохиох дүрэм ашиглан эргүүлэлтийн матрицыг олъё. Иймд (1,0), (0,1) цэгийн дүрийг олох хэрэгтэй. Координатын эх O цэгт төвтэй цагийн зүүний эсрэг 90° өнцгөөр эргүүлэх эргүүлэлтээр $(1,0) \to (0,1)$ тул $a = 0, c = 1$ болох ба $(0,1) \to (-1,0)$ тул $b = -1, d = 0$ болно. Эндээс координатын эх дээр төвтэй цагийн зүүний эсрэг 90° өнцгөөр эргүүлэх эргүүлэлтийн хувиргалтын матриц нь $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ байна.

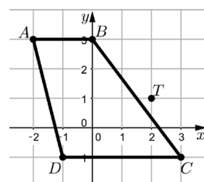
11.2. ЦЭГИЙН ХУВЬ ДАХЬ ТЭГШ ХЭМ

Хэрэв AB хэрчим O цэгээр хагаслан хуваагдаж байвал A,B хоёр цэгийг O цэгийн хувьд тэгш хэмтэй гэнэ.

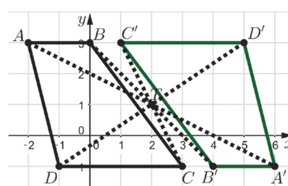
Тодорхойлолт. Хавтгайд O цэг өгсөн байг. Уг хавтгайн аливаа цэгийг O цэгийн хувьд түүнтэй тэгш хэмтэй цэгт шилжүүлэх хувиргалтыг O цэгийн хувь дахь **тэгш хэм** гэнэ. O цэгийг **тэгш хэмийн төв** гэнэ. Тэгш хэмийн төв нь үл хөдлөх цэг байна.

Цэгийн хувь дахь тэгш хэмийн хувиргалтыг тодорхойлно гэдэг нь тэгш хэмийн төвийг олно гэсэн үг. Өөрөөр хэлбэл тэгш хэмийн төвийн координатыг олно.

Жишээ 1. $T(2,1)$ цэгийн хувь дахь тэгш хэмээр $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийг хувиргаж зур.

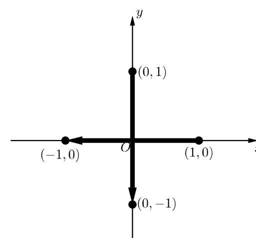


Бодолт. $T(2,1)$ цэгийн хувь дахь тэгш хэмээр A цэгийн дүр A'-ийг хэрхэн байгуулахыг тайлбарлая. AA' хэрчим T цэгээр хагаслан хуваагдах учир AT хэрчмийг T цэгээс цааш AT хэрчмийн урттай тэнцүү байхаар үргэлжлүүлэн зурж, төгсгөлийн цэгийг дүр гэх ба A' гэж тэмдэглэе. Үүнтэй адилаар B, C, D цэгийн дүрийг тус тус зурж, харгалзан B', C', D' гэж тэмдэглэнэ. Одоо координатын хавтгайд $A'B'C'D'$ дөрвөн өнцөгтийг зурна.



Жишээ 2. Координатын эх O цэгийн хувь дахь тэгш хэмийн матриц зохио.

Бодолт. O цэгийн хувь дахь тэгш хэмийн хувиргалтын матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ байг. O цэгийн хувь дахь тэгш хэмээр $(1,0) \to (-1,0)$ тул $a=-1, c=0$ болох ба $(0,1) \to (0,-1)$ тул $b=0, d=-1$ болно.



Эндээс координатын эхийн хувь дахь тэгш хэмийн хувиргалтын матриц нь $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ байна.

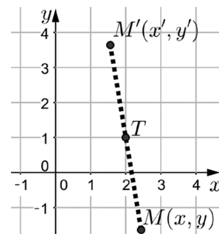
Жишээ 3. Координатын эхийн хувь дахь тэгш хэмийн матриц ашиглан $A(-2,3)$, $B(0,3)$, $C(3,-1)$, $D(-1,-1)$ цэгт оройтой $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн дүрийн координатыг ол.

Бодолт. O цэгийн хувь дахь тэгш хэмийн хувиргалтын матриц нь $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ гэдгийг мэднэ. Үүнийг ашиглан $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн дүрийг олъё.

Эхлээд $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн оройн координатуудаас $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ гэсэн матриц зохионо. Дараа нь энэ матрицаар хувиргалтын матрицыг үржүүлбэл

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ тул $A'(2,-3)$, $B'(0,-3)$, $C'(-3,1)$,$D'(1,1)$

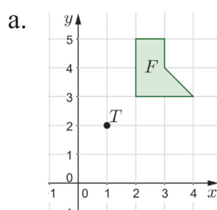
цэгт оройтой $A'B'C'D'$ дөрвөн өнцөгт гарна.

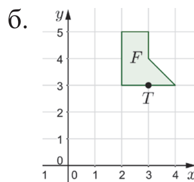


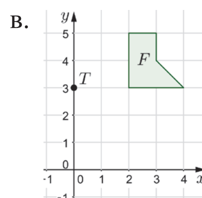
Жишээ 4. $T(a,b)$ цэгийн хувь дахь тэгш хэмийн хувиргалтын томьёог гарга.

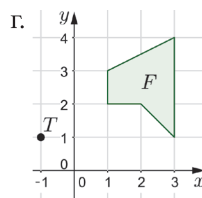
Бодолт. Хэрэв $T(a,b)$ хувь дахь тэгш хэмийн хувиргалтын $M(x,y)$ цэгийн дүр нь $M'(x',y')$ бол T нь MM' хэрчмийн дундаж цэг байна. Тэгвэл $a=\dfrac{x+x'}{2}, b=\dfrac{y+y'}{2}$ болно. Эндээс хувиргалтын томьёо нь $\begin{cases} x'=2a-x \\ y'=2b-y \end{cases}$ болно.

1. F дүрсийг T цэгийн хувь дахь тэгш хэмээр хувиргаж зур.

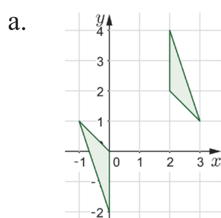
а. 

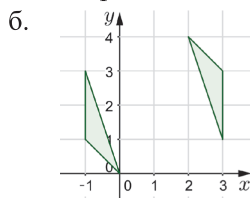
б. 

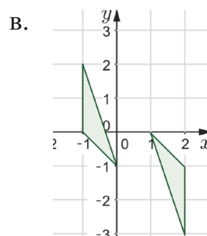
в. 

г. 

2. Дүрс болон түүнийг цэгийн хувь дахь тэгш хэмээр хувиргахад гарах дүрийг өгөв. Тэгш хэмийн тэнхлэгийг тодорхойл.

а. 

б. 

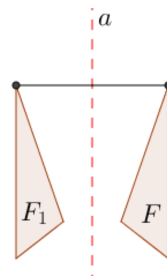
в. 

3. $M(2,1)$ цэгийн хувь дахь тэгш хэмийн хувиргалтын томьёог ашиглан $A(2,2), B(2,4), C(3,1)$ цэгт оройтой гурвалжны дүрийн координатыг ол.
4. Хувиргалтын матриц ашиглан координатын эхийн хувь дахь тэгш хэмийн хувиргалтаар дараах дүрсийн дүрийг олж, координатын хавтгайд зур.
   а. $A(1,2), B(3,1), C(5,3)$ цэгт оройтой гурвалжин
   б.$A(1,2), B(1,3), C(3,4), D(3,1), E(2,2)$ цэгт оройтой дүрс

11.3. ТЭНХЛЭГИЙН ТЭГШ ХЭМ

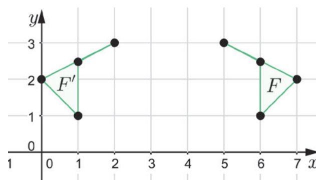
Хэрэв a шулуун AB хэрчмийн дунджийг дайрах ба AB хэрчимд перпендикуляр бол A, B хоёр цэгийг a шулууны хувьд тэгш хэмтэй гэнэ.

Тодорхойлолт. Хавтгайд a шулуун өгсөн байг. Уг хавтгайн аливаа цэгийг a шулууны хувьд тэгш хэмтэй цэгт шилжүүлэх хувиргалтыг **тэнхлэгийн тэгш хэм** гэнэ. a шулууныг **тэгш хэмийн тэнхлэг** гэнэ. Тэгш хэмийн тэнхлэгийн аливаа цэг нь үл хөдлөх цэг байна.

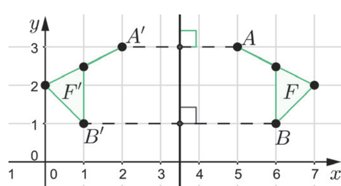


Тэнхлэгийн тэгш хэмийн хувиргалтыг тодорхойлно гэдэг нь тэгш хэмийн тэнхлэгийг байгуулна гэсэн үг. Өөрөөр хэлбэл тэгш хэмийн тэнхлэгийг зурж, тэгшитгэлийг нь зохионо.

Жишээ 1. F дүрс болон түүнийг тэнхлэгийн тэгш хэмээр хувиргахад гарсан дүр F'-ийг зурагт үзүүлэв. Тэгш хэмийн тэнхлэгийг зур, тэгшитгэлийг нь зохио.



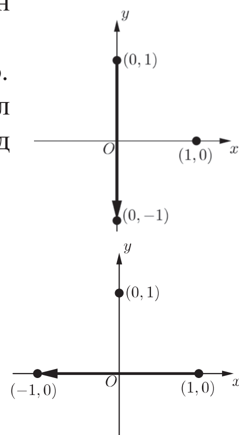
Бодолт. Тэгш хэмийн тэнхлэг нь аливаа цэгийг дүртэй нь холбосон хэрчимд перпендикуляр ба дунджийг дайрах учир AA', BB' хэрчмүүдийн дундаж цэгийг дайрах шулуун зуръя. Тэгвэл тэгш хэмийн тэнхлэг нь Oy тэнхлэгтэй параллел ба $x-3.5=0$ тэгшитгэлтэй болохыг хялбар тооцоолж болно.



Жишээ 2. а. Ox тэнхлэгийн хувь дахь тэгш хэмийн хувиргалтын матриц зохио.

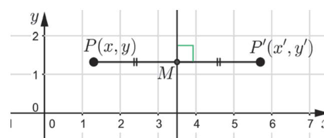
б. Oy тэнхлэгийн хувь дахь тэгш хэмийн хувиргалтын матриц зохио.

Бодолт. а. Ox тэнхлэгийн хувь дахь тэгш хэмээр $(1,0)\to(1,0)$ тул $a=1, c=0$ болох ба $(0,1)\to(0,-1)$ тул $b=0, d=-1$ болно. Иймд хувиргалтын матриц нь $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ байна.



б. Oy тэнхлэгийн хувь дахь тэгш хэмээр $(1,0)\to(-1,0)$ тул $a=-1, c=0$ болох ба $(0,1)\to(0,1)$ тул $b=0, d=1$ болно. Иймд хувиргалтын матриц нь $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ байна.

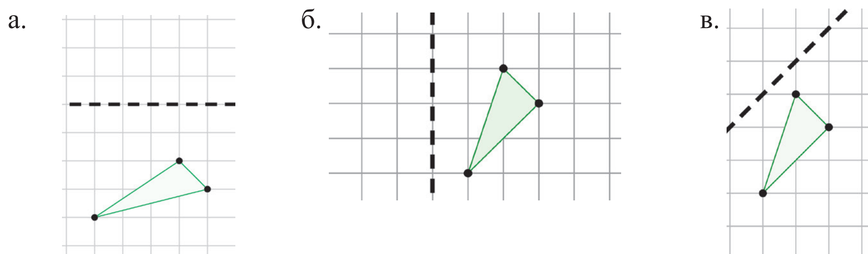
Жишээ 3. $x-3.5=0$ шулууны хувь дахь тэгш хэмийн хувиргалтын томьёог гарга.



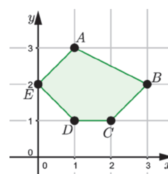
Бодолт. $P(x,y)$ цэгийн дүр $P'(x',y')$ байг. PP' хэрчим тэгш хэмийн тэнхлэгтэй огтлолцох цэгийг M гэе. Тэгвэл M цэг тэгш хэмийн тэнхлэг дээр орших тул M цэгийн абсцесс нь 3.5 байна. PP' хэрчим Ox тэнхлэгтэй параллел тул $y'=y$ байна. Иймд $M(3.5, y)$ байна.

M цэг PP' хэрчмийн дундаж тул $3.5=\dfrac{x+x'}{2}$, $y=\dfrac{y+y'}{2}$ биелнэ. Эндээс $x'=7-x$, $y'=y$ буюу $\begin{cases}x'=-x+7\\ y'=y\end{cases}$ хувиргалтын томьёо гарна.

5. Өгсөн дүрсийг өгсөн шулууны хувь дахь тэгш хэмээр хувиргаж зур.

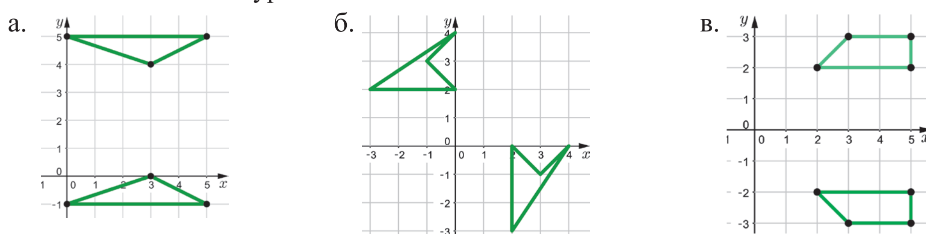


6. *ABCDE* дүрсийг $x = 3$ шулууны хувь дахь тэгш хэмээр хувиргаж зур. Энэ хувиргалтаар уг дүрсэд үл хөдлөх цэг бий юу? Хариугаа тайлбарла.



7. Өмнөх бодлогод өгсөн *ABCDE* дүрсийг $x = 1$ шулууны хувьд тэгш хэмээр хувиргаж зур. Энэ хувиргалтаар уг дүрсэд үл хөдлөх цэг бий юу? Хариугаа тайлбарла.

8. Дүрс болон түүний тэнхлэгийн тэгш хэмээр хувиргахад гарах дүрийг өгөв. Тэгш хэмийн тэнхлэгийг зурж тэгшитгэлийг нь зохио.



9. 8 дугаар бодлогын тэнхлэгийн тэгш хэм бүрийн хувиргалтын томьёог ол.

10. а. $y = x$ шулууны хувь дахь тэгш хэмийн хувиргалтын матриц нь $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

б. $y = -x$ шулууны хувь дахь тэгш хэмийн хувиргалтын матриц нь $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ болохыг харуул.

11. Хувиргалтын матрицыг ашиглан хувиргалтын томьёог гаргаж, дэвтэртээ хүснэгтийг нөхөж бич.

Тэгш хэм	*Ox* тэнхлэгийн хувь дахь	*Oy* тэнхлэгийн хувь дахь	$y = x$ хувь дахь	$y = -x$ хувь дахь	Координатын эхийн хувь дахь
Хувиргалтын томьёо					

12. Хувиргалтын матриц ашиглан $A(-2,-2)$, $B(2,1)$, $C(2,0)$ цэгт оройтой *ABC* гурвалжны дүрийн координатыг олж, координатын хавтгайд зур.

а. $y = x$ шулууны хувь дахь тэгш хэм

б. $y = 0$ шулууны хувь дахь тэгш хэм

в. $x = 0$ шулууны хувь дахь тэгш хэм

г. $y = -x$ шулууны хувь дахь тэгш хэм

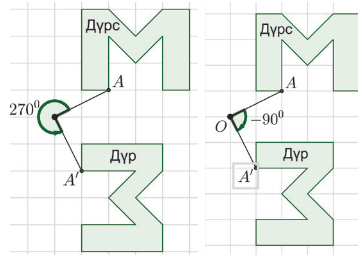
11.4. ЭРГҮҮЛЭЛТ

Тодорхойлолт. $-360° < \alpha < 360°$ ба хавтгайд O цэг өгсөн байг. Хавтгайн аливаа A цэгийг дараах нөхцөлийг хангасан A_1 цэгт шилжүүлэх хувиргалтыг O цэгийг тойруулан α өнцгөөр эргүүлэх **эргүүлэлт** гэнэ.

- $\alpha > 0$ үед O цэгт төвтэй OA радиустай тойргийн нумаар цагийн зүүний эсрэг чиглэлд A цэгийг A_1 цэгтэй холбосон AA_1 нумын төв өнцөг α байна.
- $\alpha < 0$ үед O цэгт төвтэй OA радиустай тойргийн нумаар цагийн зүүний дагуу чиглэлд A цэгийг A_1 цэгтэй холбосон AA_1 нумын төв өнцөг $|\alpha|$ байна.

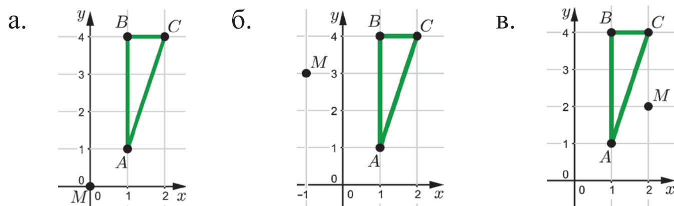
O цэгийг **эргүүлэлтийн төв,** α өнцгийг **эргүүлэлтийн өнцөг** гэнэ. Эргүүлэлтийн төв нь үл хөдлөх цэг байна.

Хэрэв $0° < \alpha < 360°$ бол O цэгт төвтэй α өнцгөөр эргүүлэх эргүүлэлт нь O цэгт төвтэй $-(360^0 - \alpha)$ өнцгөөр эргүүлэх эргүүлэлттэй тэнцүү юм.
Зурагт дүрсийг 270^0 ба -90^0 өнцгөөр эргүүлсэн эргүүлэлтүүдийг харуулав.



Эргүүлэлтийг тодорхойлно гэдэг нь эргүүлэлтийн төв, өнцөг, чиглэлийг тодорхойлно. Өөрөөр хэлбэл эргүүлэлтийн төвийн координат болон өнцгийн хэмжээ, цагийн зүүний дагуу эсвэл эсрэг эсэхийг тодорхойлно гэсэн үг.

13. ABC гурвалжныг M цэгт төвтэй 90^0 өнцгөөр эргүүлж зур.

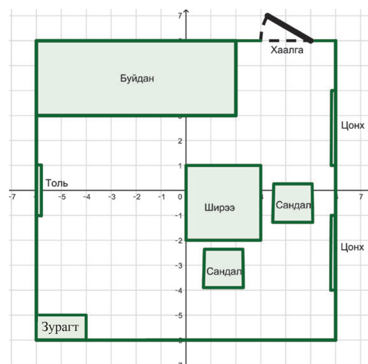


14. 13 дугаар бодлогын ABC гурвалжныг M цэгт төвтэй 180° өнцгөөр эргүүлж зур.

15. 13 дугаар бодлогын ABC гурвалжныг M цэгт төвтэй (–90°) өнцгөөр эргүүлж зур.

16. Эгшиглэн зочны өрөөнийхөө тавилгын байрлалыг өөрчлөхийг хүсэж, өрөөнийхөө зохион байгуулалтыг харуулсан зураг зуржээ. Координатын эх дээр төвтэй, дараах эргүүлэлтээр тавилгыг энэ дараалаараа байрлуулах боломжтой юу?

а. 90° б. 180° в. –90°



17. Хувиргалтын матрицыг зохиож, дэвтэртээ хүснэгтийг нөхөж бич.

Эргүүлэлт	$O(0,0)$ төвтэй 90° өнцгөөр эргүүлэх	$O(0,0)$ төвтэй (–90°) өнцгөөр эргүүлэх	$O(0,0)$ төвтэй 180° өнцгөөр эргүүлэх
Хувиргалтын матриц			

18. Координатын хавтгайд $A(2,2), B(2,4), C(6,2)$ цэгт оройтой ABC гурвалжныг зур, хувиргалтын матриц ашиглан түүний дүрийн координатыг олж, зур

а. $O(0,0)$ цэгт төвтэй 90° өнцгөөр эргүүлэх эргүүлэлт

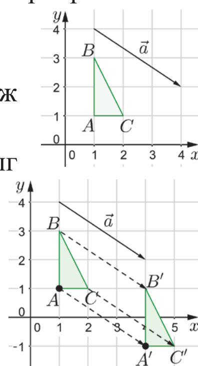
б. $O(0,0)$ цэгт төвтэй (–90°) өнцгөөр эргүүлэх эргүүлэлт

в. $O(0,0)$ цэгт төвтэй 180° өнцгөөр эргүүлэх эргүүлэлт

11.5. ПАРАЛЛЕЛ ЗӨӨЛТ

Тодорхойлолт. Хавтгайд $\vec{a}$ вектор өгсөн байг. Уг хавтгайн аливаа A цэгийг $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$ байх A_1 цэгт шилжүүлэх хувиргалтыг $\vec{a}$ вектороор **параллел зөөлт** гэнэ. Өөрөөр хэлбэл хавтгайн аливаа A цэг бүрийг $\vec{a}$ векторын чиглэлтэй параллел $|\vec{a}|$ зайгаар шилжүүлэх хувиргалтыг $\vec{a}$ вектороор параллел зөөлт гэнэ.

Параллел зөөлтийг тодорхойлно гэдэг нь $\vec{a}$ векторыг тодорхойлно. Өөрөөр хэлбэл $\vec{a}$ векторын координатыг олно гэсэн үг.



Жишээ 1. Зурагт өгсөн ABC гурвалжныг $\vec{a}$ вектороор параллел зөөж зур.

Бодолт. ABC гурвалжны A оройн дүр A'-ийг хэрхэн байгуулахыг тайлбарлая. A оройд эхлэлтэй $\vec{a}$ векторыг зурахад төгсгөлийн цэг A оройн дүр байх ба A' гэж тэмдэглэе. Үүнтэй адилаар бусад оройн дүрийг байгуулна. $A'B'C'$ гурвалжныг зурна.

Санамж $\vec{a}$ векторын координатыг (p,q) гэж тэмдэглэхээс гадна $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ хэлбэртэй тэмдэглэдэг.

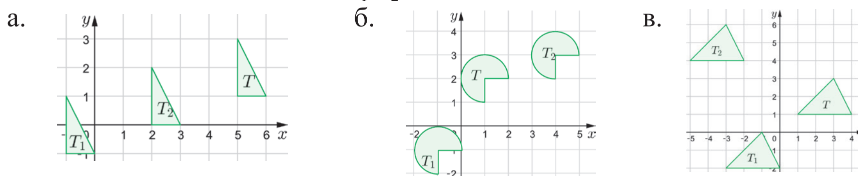
Жишээ 2. Хэрэв $\vec{a}$ вектор нь $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ координаттай бол $\vec{a}$ вектороор параллел зөөлтийн хувиргалтын томьёог гарга.

Бодолт. Хэрэв $\vec{a}$ вектороор параллел зөөлтөөр $M(x,y)$ цэгийн дүр $M'(x',y')$ бол $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$ байна. $\overrightarrow{MM'}$ векторын координат нь $\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix}$ ба $\vec{a}$ векторын координат нь $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ байна. Тэгвэл $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$ тул координат нь тэнцүү болно. Иймд $\begin{cases} x'-x = p \\ y'-y = q \end{cases}$ тэнцэтгэл биелнэ. Эндээс хувиргалтын томьёо нь $\begin{cases} x' = x+p \\ y' = y+q \end{cases}$ болно.

19. (4,3) цэгийн дүр (–2,7) байх параллел зөөлтийг тодорхойл.

20. Зурагт өгсөн T дүрсийн дүр T_1, T_2 байх параллел зөөлтүүдийг тус тус тодорхойл.

а. б. в.

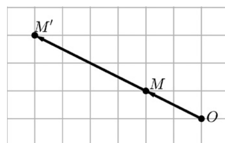


11.6. ГОМОТЕТ

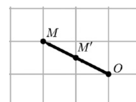
Тодорхойлолт. Тэгээс ялгаатай k бодит тоо ба хавтгайд O цэг өгсөн байг. Хавтгайн аливаа M цэгийг $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$ байх M' цэгт шилжүүлэх хувиргалтыг O цэгт төвтэй k коэффиценттэй **гомотет** гэнэ. O цэгийг **гомотетын төв,** k тоог **гомотетын коэффицент** гэнэ.

Гомотетыг тодорхойлно гэдэг нь гомотетын төв ба коэффицентийг олно. Өөрөөр хэлбэл гомотетын төвийн координат болон коэффицентийг тодорхойлно гэсэн үг.

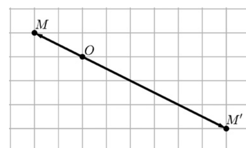
Дурын M цэгийг сонгож авч O цэгт төвтэй k коэффиценттэй гомотетоор хувиргахад гарах дүр M' цэгийг k тооны зарим утгын хувьд зургаар үзүүлье.



$k = 3$ үед $\overrightarrow{OM'} = 3 \cdot \overrightarrow{OM}$ байх M' цэг, өөрөөр хэлбэл O цэгт эхлэлтэй $\overrightarrow{OM}$ вектороос 3 дахин урт $\overrightarrow{OM'}$ вектор зурахад төгсгөлийн цэг нь M' цэг байна.



$k = \dfrac{1}{2}$ үед $\overrightarrow{OM'} = \dfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OM}$ байх M' цэг, өөрөөр хэлбэл O цэгт эхлэлтэй $\overrightarrow{OM}$ вектороос 2 дахин богино урт $\overrightarrow{OM'}$ вектор зурахад төгсгөлийн цэг нь M' цэг байна.

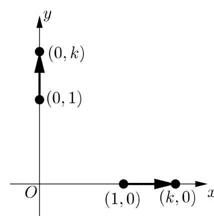


$k = -3$ үед $\overrightarrow{OM'} = (-3) \cdot \overrightarrow{OM}$ байх M' цэг, өөрөөр хэлбэл O цэгт эхлэлтэй $\overrightarrow{OM}$ векторын эсрэг чиглэлд түүнээс 3 дахин урт $\overrightarrow{OM'}$ вектор зурахад төгсгөлийн цэг нь M' цэг байна.
$\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$ тул M, M', O цэг нэг шулуун дээр оршино. Эндээс цэг ба түүний дүрийг дайран гарах шулуун гомотетын төвийг агуулна.

Жишээ 1. k коэффиценттэй гомотетоор A, B цэгийг хувиргахад гарах дүр нь A', B' бол $\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ болохыг харуул.
Бодолт. Гомотетын төвийг O гэе. Векторыг нэмэх гурвалжны дүрмээр $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OB'}$
Гомотетын тодорхойлолт ёсоор $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$ ба $\overrightarrow{OB'} = k \cdot \overrightarrow{OB}$ тул
$\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = -k \cdot \overrightarrow{OA} + k \cdot \overrightarrow{OB} = k\left(-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = k\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right) = k \cdot \overrightarrow{AB}$ болно.

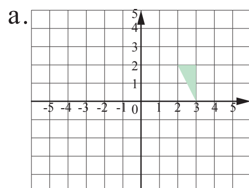
Жишээ 2. Координатын эх дээр төвтэй k коэффиценттэй гомотетын хувиргалтын матриц зохио.

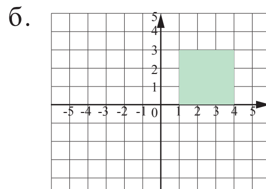
Бодолт. Координатын эх O цэгт төвтэй k коэффициенттэй гомотетоор $(1,0)\to(k,0)$ тул $a=k, c=0$ болох ба $(0,1)\to(0,k)$ тул $b=0,\ d=k$ болно. Иймд хувиргалтын матриц нь $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$.

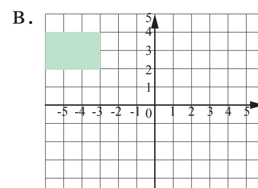


21. M цэгт төвтэй k коэффициенттэй гомотетоор зурагт өгсөн дүрсийн дүрийг зур.

а. $M(4,1),\ k=2$ б. $M(-5,-3),\ k=\dfrac{1}{3}$ в. $M(1,1),\ k=-2$

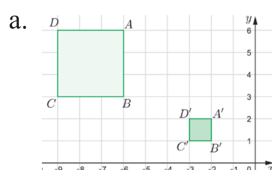
а. 

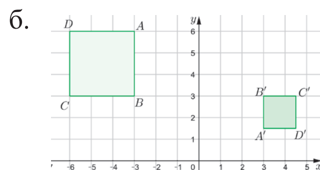
б. 

в. 

22. 21 дүгээр бодлогын хувиргалт бүрийн хувиргалтын томьёог ол.

23. $ABCD$ дүрсийг хувиргахад гарах дүр нь $A'B'C'D'$ байх гомотетыг тодорхойлж, хувиргалтын томьёог зохио.

а. 

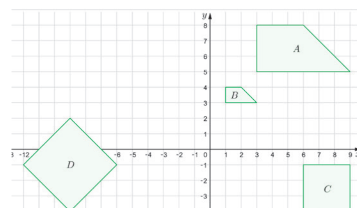
б. 

24. A дүрсийг B дүрсэд хувиргах гомотетын

а. Төв ба коэффицентийг ол.

б. C ба D дүрсийг гомотетоор хувиргахад гарах дүрийг зур.

в. D дүрсийн талбайг дүрийнх нь талбайд харьцуулсан харьцааг ол.

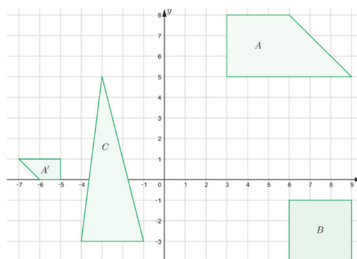


25. A дүрсийг A' дүрсэд хувиргах гомотетын

а. Төв ба коэффицентийг ол.

б. B ба C дүрсийг гомотетоор хувиргахад гарах дүрийг зур.

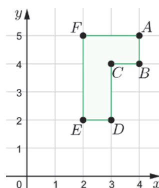
в. C дүрсийн талбайг дүрийнх нь талбайтай харьцуулсан харьцааг ол.



26. Координатын хавтгайд $A(1,2), B(1,6), C(5,6), D(5,2)$ цэгт оройтой квадрат зур, хувиргалтын матрицыг ашиглан координатын эх O цэгт төвтэй өгсөн коэффиценттэй гомотетоор $ABCD$ квадратын дүрийн координатыг олж, зур.

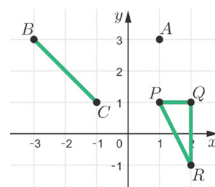
а. $k=\frac{1}{4}$ б. $k=-1$ в. $k=-\frac{1}{2}$ г. $k=-3$

27. Хувиргалтын матрицыг ашиглан *ABCDEF* дүрсийн дүрийн координатыг олж, зур.



а. Координатын эх дээр төвтэй (–90°) өнцгөөр эргүүлэх эргүүлэлт
б. Координатын эхийн хувь дахь тэгш хэм
в. Координатын эх дээр төвтэй 180° өнцгөөр эргүүлэх эргүүлэлт
г. $y=-x$ шулууны хувь дахь тэгш хэм
д. $(x,y)\rightarrow\left(\frac{1}{2}x,\frac{1}{2}y\right)$

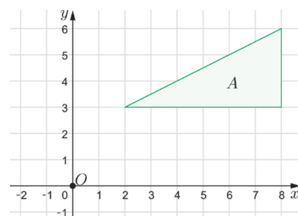
28. Хувиргалтын матрицыг ашиглан *A* цэг, *BC* хэрчим, *PQR* гурвалжныг тус тус хувиргахад гарах дүрийн координатыг олж, зур.



а. $y=x$ шулууны хувь дахь тэгш хэм
б. Координатын эх дээр төвтэй $k=-\frac{1}{2}$ коэффиценттэй гомотет
в. Координатын эх дээр төвтэй 90° өнцгөөр эргүүлэх эргүүлэлт
г. $x=0$ шулууны хувь дахь тэгш хэм

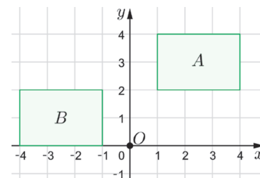
БҮЛГИЙН НЭМЭЛТ ДААЛГАВАР

1. Дараах хувиргалтаар зурагт өгсөн *A* дүрсийн дүрийг зур.



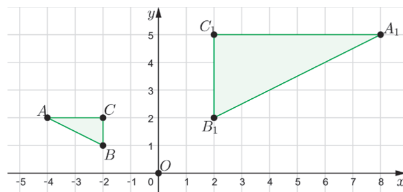
а. $x=2$ тэнхлэгийн хувь дахь тэгш хэм
б. (2,3) цэгийн хувь дахь тэгш хэм
в. (1,2) цэгт төвтэй, (–90°) өнцгөөр эргүүлэх
г. $(-1,-3)$ цэгт төвтэй, $k=\frac{1}{3}$ коэффициенттэй гомотет
д. $\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ координаттай вектороор параллел зөөлт

2. а. Ямар вектороор параллел зөөхөд *A* дүрсийн дүр *B* байх вэ?



б. Параллел зөөлтийн хувиргалтын томьёог зохио.
в. *A* дүрсийн дүр *B* байх эргүүлэлтийг тодорхойл.
г. Эргүүлэлтийн хувиргалтын томьёог зохио.

3. *ABC* гурвалжныг гомотетоор хувиргахад гарах дүр нь $A_1B_1C_1$ гурвалжин болно.



а. Гомотетын төв ба коэффицентийг ол.
б. Гомотетын хувиргалтын томьёог зохио.
в. $A_1B_1C_1$ гурвалжныг энэ гомотетоор хувиргахад гарах дүрийг $A_2B_2C_2$ гэж тэмдэглэе. Тэгвэл $A_2B_2C_2$ гурвалжны талбайг *ABC* гурвалжны талбайд харьцуулсан харьцааг ол.

4. а. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ матриц ямар хувиргалтыг тодорхойлох вэ?

б. Дээр тодорхойлсон хувиргалтаар $A(1,2)$, $B(2,1)$, $C(6,3)$ цэгт оройтой ABC гурвалжны дүрийн координатыг ол.

5. Координатын хавтгайд $A(4,3)$, $B(0,10)$, $C(3,1)$ цэгт оройтой ABC ба $A_1(0,5)$, $B_1(8,6)$, $C_1(-1,3)$ цэгт оройтой $A_1B_1C_1$ гурвалжнуудыг зур.

а. Хэрэв ABC гурвалжныг тэнхлэгийн тэгш хэмээр хувиргахад гарах дүр нь $A_1B_1C_1$ болтэгш хэмийн тэнхлэгийн тэгшитгэл зохио.

б. $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\overset{\quad A \quad B \quad C}{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 3 & 10 & 1 \end{pmatrix}} = \overset{\quad A_1 \; B_1 \; C_1}{\begin{pmatrix} 0 & 8 & -1 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}}$ байх p,q,r,s тоог ол.

в. $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ нь ямар хувиргалтын матриц вэ?

г. $A_1B_1C_1$ гурвалжныг $y = 0$ шулууны хувь дахь тэгш хэмээр хувиргахад гарах дүрийг $A_2B_2C_2$ гэж тэмдэглэ.

д. $O(0,0)$ цэгт төвтэй хэдэн градусын өнцгөөр эргүүлэх эргүүлэлтээр ABC гурвалжны дүр нь $A_2B_2C_2$ байх вэ?

6. Координатын хавтгайд $A(8,3)$, $B(10,6)$, $C(11,4)$ цэгт оройтой ABC ба $A_1(-3,8)$, $B_1(-6,10)$, $C_1(-4,11)$ цэгт оройтой $A_1B_1C_1$ гурвалжныг зур.

а. ABC гурвалжныг эргүүлэлтээр хувиргахад гарах дүр нь $A_1B_1C_1$ бол эргүүлэлтийн төв ба өнцгийг ол.

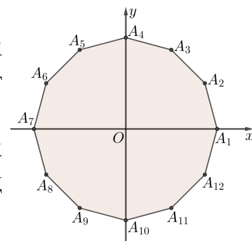
б. $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\overset{\quad A \quad B \quad C}{\begin{pmatrix} 8 & 10 & 11 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}} = \overset{\quad A_1 \quad B_1 \quad C_1}{\begin{pmatrix} -3 & -6 & -4 \\ 8 & 10 & 11 \end{pmatrix}}$ байх p, q, r ба s тоонуудыг ол.

в. $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ нь ямар хувиргалтыг тодорхойлох матриц вэ?

г. $A_1B_1C_1$ гурвалжныг координатын эхийн хувь дахь тэгш хэмээр хувиргахад гарах дүрийг $A_2B_2C_2$ гэж тэмдэглэ.

д. Ямар хувиргалтын матрицтай эргүүлэлтээр ABC гурвалжны дүр нь $A_2B_2C_2$ байх вэ?

7. Зурагт үзүүлсэн зөв 12 өнцөгт дүрсийг F гэж тэмдэглэе.



а. F дүрсийг эргүүлэхэд гарах дүр нь F байдаг бүх эргүүлэлтийг тодорхойл (Эргүүлэлтийн төв ба өнцгийг ол).

б. Хэрэв A_1 цэгийн координат (1, 0) бол координатын эх дээр төвтэй 30°өнцгөөр эргүүлэх эргүүлэлтийн матриц $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ гэдгийг ашиглан A_2 цэгийн координатыг ол.

в. A_2 цэгийн координатыг мэдсэнээр A_3 цэгийн координатыг ол.

XII БҮЛЭГ. ӨГӨГДЛИЙН ШИНЖИЛГЭЭ

Энэ бүлэг сэдвийг судалснаар дараах мэдлэг, чадваруудыг эзэмшинэ.

- *Бүлэглэсэн өгөгдлийн моод бүлэг, арифметик дундаж, медианыг тооцоолох (тэнцүү, тэнцүү биш завсраар бүлэглэсэн)*
- *Гистограмм байгуулах, унших (тэнцүү, тэнцүү биш завсраар бүлэглэсэн)*
- *Квартил, квартил хоорондын далайцыг үнэлэх, тайлбарлах*
- *Хуримтлагдсан давтамжийн график байгуулах, хэрэглэх, медианыг олох*
- *Цэгэн диаграмм, түүний хандлагын шулууныг ойлгох, баримжаалан зурах*
- *Корреляцыг ойлгох, тайлбарлах (эерэг, сөрөг, хамааралгүй)*

12.1. БҮЛЭГЛЭСЭН ӨГӨГДЛИЙН ДУНДЖУУД

Өмнөх ангиудад бид тоон өгөгдлийн хувьд дунджуудыг тооцоолж сурсан.

Санамж. Өгөгдөлд хамгийн олон давтагдаж байгаа утгыг моод гэдэг. Моод нь олон байж болох ба хэрэв давтагдсан утга байхгүй бол моодгүй байна.

Өгөгдөл дэх утгуудын нийлбэрийг утгын тоонд хуваахад гарсан тоог арифметик дундаж гэнэ.

Тоон өгөгдлийн утгуудыг өсөх эрэмбээр байрлуулсны дараа, хэрэв өгөгдлийн утгын тоо $2n+1$ бол $n+1$ дүгээр утгыг, харин $2n$ бол n ба $n+1$ дүгээр утгуудын арифметик дунджийг медиан гэдэг. Өгөгдлийн моод, медиан, арифметик дунджийг дундаж үзүүлэлтүүд буюу товчоор дунджууд гэнэ.

Одоо бид бүлэглэсэн өгөгдөл ба түүний дундаж үзүүлэлтүүдийг хэрхэн олох талаар судална.

Тодорхойлолт. Аливаа тоон өгөгдлийн утгуудыг агуулсан тоон завсрыг тодорхой жижиг завсрууд болгон хувааж уг жижиг завсарт харьяалагдах утгуудын давтамжаар үүссэн өгөгдлийг **бүлэглэсэн өгөгдөл** гэнэ.

Жишээ 1. Дараах тоон өгөгдлийг бүлэглэсэн хэлбэрт оруул. 24, 5.4, 29.1, 56.1, 82.9, 30.1, 18.2, 93.9, 11, 21.9, 60.4, 56.7, 87.1, 48.3, 38.6, 63.5, 43, 40.1, 70.4, 72.2, 72, 33.5, 43.8, 43.7, 71.8, 48.9, 46.3, 63, 56.3, 56.3, 37.9, 54.9, 59, 42.3, 60.1, 53.8, 43.1, 53.2, 61.1, 45.9

Бодолт. Өгөгдлийн утгууд нь 0-ээс 100-ийн хооронд буюу]0,100[завсарт байна. Уг завсрыг [0,10[, [10,20[, [20,30[, [30,40[, [40,50[, [50,60[, [60,70[, [70,80[, [80,90[, [90,100[гэсэн завсруудад хувааж, завсар бүрд орж байгаа утгуудын тоог олж дараах хүснэгтээр харуулав.

Завсар	[0,10[	[10,20[	[20,30[	[30,40[	[40,50[	[50,60[	[60,70[	[70,80[	[80,90[	[90,100[
Давтамж	1	2	3	4	10	8	5	4	2	1

Хүснэгтээс тоонуудын ихэнх нь 30-аас 70-ын хооронд орших төдийгүй, 40-өөс 50-ийн хооронд өгөгдлийн хамгийн олон утга байгаа нь харагдаж байна.

Өгөгдөл бүлэглэсэн хэлбэрт байгаа үед моодыг олох боломжгүй. Харин бүлэглэсэн өгөгдлийн хамгийн их давтамжтай завсрыг **моод бүлэг** гэдэг. Жишээ 1 дэх моод бүлэг нь хамгийн их 10 гэсэн давтамжтай [40,50[завсар байна.
Завсрыг тэнцүү урттай авах албагүй, 10-аас ялгаатай урттайгаар авбал үүнээс өөр, бүр тодорхой зүй тогтол харагдаж болно.
Тэнцүү биш завсраар бүлэглэсэн өгөгдлийн дунджуудыг хэрхэн олохыг жишээгээр харуулъя.

Жишээ 2. Дараах өгөгдлийн моод бүлэг, арифметик дунджийг ол. Медиан нь аль завсарт харьяалагдах вэ?

Завсар	[1,3[	[3,4[	[4,5[	[5,6[	[6,7[	[7,8[	[8,10[
Давтамж	4	35	33	23	13	12	3

Бодолт. *Моод бүлэг:* Хамгийн олон 35 гэсэн давтамжтай завсар [3,4[тул моод бүлэг нь [3,4[болно.
Арифметик дундаж. Тоо тус бүр яг хэдтэй тэнцүү байгаа нь тодорхойгүй байгаа энэ нөхцөлд өгсөн завсар дахь тоо бүрийг уг завсрын дундаж утгаар төлөөлүүлнэ. Тухайлбал: Дараах хүснэгтэд өгөгдлийн завсар бүр дэх тоонуудын төлөөлсөн утгын нийлбэрийг хэрхэн олохыг үзүүлэв.

Завсар	[1,3[	[3,4[	[4,5[	[5,6[	[6,7[	[7,8[	[8,10[
Давтамж	4	35	33	23	13	12	3
Завсрын дундаж утга	2	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	9
Завсар дахь утгуудын нийлбэр	$2\cdot4=8$	$3.5\cdot35=122.5$	$4.5\cdot33=148.5$	$5.5\cdot23=126.5$	$6.5\cdot13=84.5$	$7.5\cdot12=90$	$9\cdot3=27$

Өгөгдлийн бүх утгын нийлбэр 8+122.5+148.5+126.5+84.5+90+27=607 гарах ба өгөгдлийн утгын тоо 123 учраас арифметик дундаж нь $607:123=4.934959\approx4.9$ болно.
Медиан. Өгөгдөл нь өсөх дараалаар эрэмбэлсэн 4+35+33+23+13+12+3=123 ширхэг тооноос тогтож байна. Иймд медиан нь $\frac{123+1}{2}=62$ дугаарт байна. Утгуудаас 4 ширхэг нь [1,3[завсарт, 35 ширхэг нь [3,4[завсарт, 33 ширхэг нь [4,5[завсарт оршиж байгаа тул 62 дугаарт байрлах тоо буюу медиан нь [4,5[завсарт харьяалагдана.

1. Уралдаж яваа морь бүрийн гарааны эхний 1 км-т давхисан хурд аль завсарт байгааг хүснэгтэд харуулав.

Хурд (км/цаг)	[55,57[	[57,59[	[59,61[	[61,63[	[63,65[	[65,67[	[67,69[	[69,71[	[71,73[	[73,75[
Давтамж	1	2	8	18	18	35	25	22	13	3

а. Хэдэн морь уралдсан бэ?
б. Морьдын дундаж хурдыг ол.

2. Дараах өгөгдлийн моод бүлэг, арифметик дунджийг ол. Медиан нь аль завсарт байх вэ?

Завсар	[0,5[	[5,10[	[10,15[	[15,20[	[20,25[	[25,30[	[30,35[	[35,40[	[40,45[	[45,50[
Давтамж	1	2	2	11	12	15	19	23	26	30

3. Дараах өгөгдлийн арифметик дундаж 18 бол хоосон нүдэн дэх тоог нөх.

Завсар	[7,9[	[9,11[	[11,13[	[13,15[	[15,17[	[17,19[	[19,21[	[21,23[	[23,25[	[25,27[	[27,29[
Давтамж	6	5	3	2	1	0	1	2	4		7

4. "Азийн зүүн бүсийн эрэгтэйчүүдийн волейболын аварга шалгаруулах тэмцээн 2017"-д Тайвань ба БНСУ - аас оролцсон тус бүр 12 тамирчны дундаж өндөр адилхан байв. Тайваний тамирчид 188, 196, 195, 181, 187, 195, 185, 194, 191, 170, 194, 191 см өндөртэй ба БНСУ- ын тамирчдын өндөр 195, 183, 187, 184, 187, 193, 190, 190, 186, 181, 193 см гэж өгсний дотор нэг тамирчны өндрийг орхигдуулсан байв.

а. Тамирчдын дундаж өндрийг ол.

б. БНСУ- ын хамгийн өндөр тамирчны өндрийн хэмжээг ол.

5. Дараах өгөгдлийн арифметик дунджийг ол. Медиан нь аль завсарт байх вэ?

Завсар	[1,2[	[2,4[	[4,7[	[7,11[	[11,15[	[15,20[	[20,24[	[24,27[	[27,29[
Давтамж	1	3	13	35	23	33	12	2	1

6. Дараах өгөгдлийн медиан ба арифметик дунджийг ол.

Завсар	[0,5[	[5,10[	[10,14[	[14,18[	[18,21[	[21,23[	[23,26[	[26,29[	[29,33[	[33,37[
Давтамж	1	2	15	12	30	23	26	19	11	2

7. Хэрэв дараах өгөгдлийн арифметик дундаж 36.24648 бол хоосон нүднүүдийг нөх.

Завсар	[10,15[	[15,20[	[20,25[		[30,34[	[34,38[	[38,42[	[42,46[		[50,55[	[55,60[
Давтамж	1	3	8	17	27	20		20	11	2	1

8. Дараах өгөгдлийн моод бүлэг, арифметик дунджийг ол. Медиан нь аль завсарт орших вэ?

Завсар	[7,9[	[9,11[	[11,13[	[13,15[	[15,18[	[18,21[	[21,24[	[24,27[	[27,29[	[29,31[	[31,33[
Давтамж	1	2	8	18	26	23	24	12	14	2	1

12.2. ГИСТОГРАММ

Бид өмнө нь ихэвчлэн натурал, бүхэл тоон утга авдаг өгөгдлүүдийн статистик тооцооллыг хийж байсан.

Тодорхойлолт. Дурын бодит тоон утга авч болдог өгөгдлийг **тасралтгүй өгөгдөл** гэнэ.

Зарим тасралтгүй ба дискрет өгөгдлийг тодорхой завсруудад хуваан бүлэглэж гистограмм гэж нэрлэгдэх диаграммаар дүрсэлбэл тохиромжтой байдаг.

Гистограмм байгуулахын тулд давтамжийн нягтыг дараах томьёогоор завсар бүрд олно.

$$\text{Давтамжийн нягт} = \frac{\text{Давтамж}}{\text{Завсрын урт}}$$

Хэвтээ тэнхлэг дээр өгөгдлийн авч болох утга, босоо тэнхлэг дээр давтамжийн нягтыг авч, баганан диаграммтай төстэйгөөр баганын өргөнийг харгалзах завсрын урттай тэнцүү байхаар байгуулна.

Баганын талбай нь баганын өндөр, завсрын уртын үржвэртэй тэнцүү тул давтамжтай тэнцүү байна. Бүх баганын талбайн нийлбэр нийт давтамжийг илэрхийлнэ.

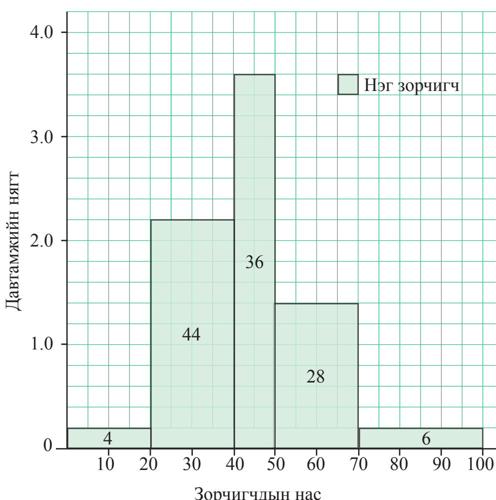
Жишээ 1. Галт тэрэгний зорчигчдын насны мэдээллийг дараах хүснэгтэд үзүүлжээ. Өгөгдлөөр гистограмм байгуул.

Зорчигчийн нас	$0 \le t < 20$	$20 \le t < 40$	$40 \le t < 50$	$50 \le t < 70$	$70 \le t < 100$
Давтамж	4	44	36	28	6

Бодолт. Давтамжийн нягтыг олъё.

Зорчигчийн нас	$0 \le t < 20$	$20 \le t < 40$	$40 \le t < 50$	$50 \le t < 70$	$70 \le t < 100$
Давтамж	4	44	36	28	6
Давтамжийн нягт	$\frac{4}{20} = 0.2$	$\frac{44}{20} = 2.2$	$\frac{36}{10} = 3.6$	$\frac{28}{20} = 1.4$	$\frac{6}{30} = 0.2$

Хэвтээ тэнхлэг дээр *t* - ийн 0-100 утгуудыг авч, 0, 20, 40, 50, 70, 100 тоонд харгалзах цэгүүдийг тэмдэглэнэ. Босоо тэнхлэг дээр давтамжийн нягт 0-4 хуваарь гаргана. Харгалзах баганууд байгуулсныг зурагт харуулав. Энэ бол тэнцүү биш завсраар бүлэглэсэн өгөгдлийн гистограммын жишээ юм.



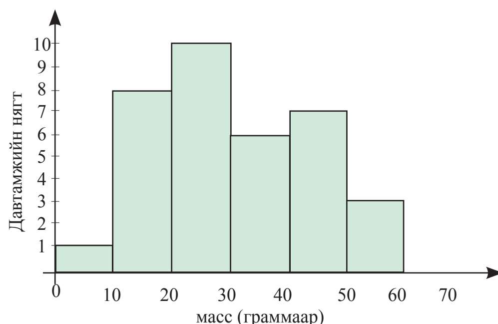
9. Тэнцүү завсарт бүлэглэсэн 12.1 сэдвийн Жишээ 1-ийн өгөгдлөөр гистограмм байгуул.

10. Автобусны зорчигчдын насыг үзүүлэв.
6, 70, 5, 32, 19, 44, 25, 18, 56, 24, 30, 54, 57, 21, 43, 54, 35, 36, 47, 33, 33, 48, 25, 20, 32, 35, 29, 54, 69, 42, 21, 49, 63, 52, 47, 28, 48, 24, 54, 39

Хөдөлмөрийн харилцаанд орох онцлогоос хамаарч хүний насыг
0-18 хүүхэд нас,
18-25 ажил, амьдралд бэлтгэгдэх нас,
25-35 чадваржиж, туршлагажих нас,
35-50 бүтээх нас,
50-60 ажил, бүтээлийн ид өрнөлийн нас,
60-аас дээш хөдөлмөрийн бүтээмж бууралтын нас гэж ангилжээ.

Өгөгдлийг насаар нь заасан завсраар ангилж гистограмм байгуул.

11. Дараах гистограммыг уншаарай.
а. Гистограммаас давтамжийн хүснэгтийг зохио.
б. Нийт давтамжийн тоог ол. Нэг давтамж ямар талбай эзлэх вэ?



12. Хүснэгт дэх өгөгдлөөр гистограмм байгуул.

Таримлын өндөр	[0,20[	[20,30[	[30,50[	[50,70[	[70,80[
Давтамж	2	9	16	12	3

12.3. КВАРТИЛ, КВАРТИЛ ХООРОНДЫН ДАЛАЙЦ

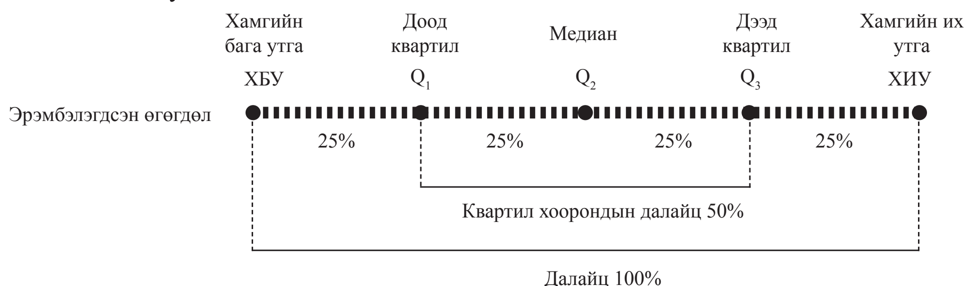
Зарим өгөгдлийн арифметик дундаж нь дундаж утгыг төлөөлж чаддаггүй. Жишээлбэл: Компанийн ажилтнууд 500, 600, 620, 625, 700, 850, 920 мянга, захирал 4 сая төгрөгийн цалинтай байв. Энэ компанид ажилд орвол арифметик дунджаар $\frac{4+0.5+0.6+0.62+0.625+0.7+0.85+0.92}{8}=\frac{8.815}{8}=1.12$ сая буюу 1 120 000 төгрөгийн цалин авч чадах уу? Ганц хүн бусдаасаа хэт өндөр цалинтай байгаагаас ийм бодит биш байдал үүсэж байна.

Энэ үед квартил хэмээх ойлголтыг оруулснаар энэ асуултад нэгэн хариулт өгч болно.

Өсөхөөр эрэмбэлсэн өгөгдлийг тэнцүү тооны утгатай хоёр өгөгдөл болгон зааглах утгыг **медиан** гэдэг. Медианыг Q_2 гэж тэмдэглэнэ.

Медианы зүүн талд орших өгөгдлийг доод хагас, баруун талд орших өгөгдлийг дээд хагас өгөгдөл гэнэ. Доод хагас өгөгдлийн медианыг **доод квартил**, дээд хагас өгөгдлийн медианыг **дээд квартил** гэж нэрлээд харгалзан Q_1, Q_3 гэж тэмдэглэдэг.

Тэгвэл медиан ба дээд, доод квартилууд эрэмбэлсэн өгөгдлийг тэнцүү тоотой дөрвөн өгөгдөл болгон хуваана.



Өгөгдлийн хамгийн бага утгыг ХБУ, хамгийн их утгыг ХИУ гэвэл далайц нь ХИУ ба ХБУ-ын ялгавар байна. Үүнтэй адилаар $Q_3 - Q_1$ ялгаврыг **квартил хоорондын далайц** гэнэ.

Квартилуудыг дугаараар нь дараах дүрмээр олж болно.

<table>
<tr><td>Эрэмбэлэгдсэн өгөгдлийн утгын тоо n</td><td>n-ийг 4-д хуваахад үлдэгдэл 2 гарч байвал</td><td>Бусад тохиолдолд</td><td rowspan="4"><u>Тайлбар:</u> Хэрвээ эдгээр дугааруud бүхэл гарахгүй бол харгалзах квартилууд нь түүний хоёр талд хамгийн ойр орших хоёр бүхэл тоон дугаартай утгуудын арифметик дундажтай тэнцүү байна.</td></tr>
<tr><td>Доод квартилийн байрлах дугаар</td><td>$\frac{1}{4}(n+2)$</td><td>$\frac{1}{4}(n+1)$</td></tr>
<tr><td>Медианы байрлах дугаар</td><td>$\frac{1}{2}(n+1)$</td><td>$\frac{1}{2}(n+1)$</td></tr>
<tr><td>Дээд квартилийн байрлах дугаар</td><td>$\frac{3n+2}{4}$</td><td>$\frac{3}{4}(n+1)$</td></tr>
</table>

Жишээ 1. 2, 3, 7, 9, 10, 11, 14, 14, 16 өгөгдлийн доод, дээд квартил ба квартил хоорондын далайцыг ол.

Бодолт 1. Өгөгдлийн медиан 10 нь өгөгдлийг тэнцүү тоотой 2, 3, 7, 9 ба 11, 14, 14, 16 хоёр өгөгдөл болгон хуваана. Доод хагас өгөгдлийн медиан $\frac{3+7}{2}=5$ нь анхны өгөгдлийн доод квартил Q_1, дээд хагас өгөгдлийн медиан $\frac{14+14}{2}=14$ нь анхны өгөгдлийн дээд квартил Q_3 болно. $Q_1=5$, $Q_3=14$. Квартил хоорондын далайц $Q_3-Q_1=14-5=7$ болно.

Квартилуудын байршлыг томьёогоор олъё.

Бодолт 2. Өгөгдөл $n=9$ ширхэг тооноос бүрдэнэ. 9-ийг 4-д хуваахад үлдэгдэл 2 гарахгүй.

$\frac{1}{2}(n+1)=\frac{10}{2}=5$ тул медиан нь 5 дугаар утга 10-тай тэнцүү,

$\frac{1}{4}(n+1)=\frac{1}{4}(9+1)=2.5$ тул доод квартил нь 2 ба 3 дугаар гишүүдийн дундаж $Q_1=\frac{3+7}{2}=5$ -тай тэнцүү,

$\frac{3}{4}(n+1)=\frac{3}{4}(9+1)=7.5$ тул дээд квартил нь 7 ба 8 дугаар гишүүдийн дундаж $Q_3=\frac{14+14}{2}=14$ -тэй тэнцүү байна.

13. Эрэмбэлсэн өгөгдөл а. $4k$, б. $4k\pm1$, в. $4k\pm2$ ширхэг тооноос тогтох бол квартилуудын утга хэддүгээрт байрлах тоонуудын орчим байх вэ?

14. Эрэмбэлсэн өгөгдлийн медиан ба квартилуудын утга өгөгдөл доторх тоонуудтайгаа тэнцүү бол утгуудын тоог 4-д хуваахад ямар үлдэгдэл гарах вэ?

15. Хэрэв эрэмбэлсэн өгөгдлийн медиан ба квартилуудын утга өгөгдөл доторх утгуудтайгаа тэнцүү биш бол утгуудын тоог 4-д хуваахад ямар үлдэгдэл гарах вэ?

16. Дараах өгөгдөл бүрийн хувьд арифметик дундаж, медиан, моод, квартил, квартил хоорондын далайцыг ол.

а. Хөл бөмбөгийн баг 15 удаа тоглож дараах оноо авчээ.
1, 0, 2, 4, 0, 1, 1, 1, 2, 5, 3, 0, 1, 2, 2

б. Хоёр шоог 20 удаа орхиход буусан нүднүүдийн нийлбэр өгөв.
7, 4, 5, 7, 3, 2, 8, 6, 8, 7, 6, 5, 11, 9, 7, 3, 8, 7, 6, 5

в. Сурагч 100 метрт гүйх сургуулилт хийж байв. Түүний гүйсэн хугацаа нь (сек) 14.0, 14.3, 14.1, 14.3, 14.2, 14.0, 13.9, 13.8, 13.9, 13.8, 13.7, 13.8, 13.8, 13.8

г. Нэг сарын хугацаанд ангид хэдэн хүүхэд хичээллэснийг ирцийн бүртгэлээс түүвэрлэвэл:
28, 24, 25, 28, 23, 28, 27, 26, 27, 25, 28, 28, 28, 26, 25, 26, 28, 27, 28, 25, 27, 26

17. Компанийн ажилтнууд 500, 600, 620, 625, 700, 850, 920 мянга, захирал 4 сая төгрөгийн цалинтай байв. Хэрэв би энэ компанид ажилд орвол хэд орчим төгрөгийн цалин авах вэ? Квартилуудыг олж, хариуг давхар тэнцэтгэл бишээр илэрхийл. Цалингийн хэмжээг арифметик дундаж, давхар тэнцэтгэл бишээр илэрхийлсний аль нь үнэмшилтэй, бодит үнэнд ойртох вэ?

12.4. ХУРИМТЛАГДСАН ДАВТАМЖИЙН ГРАФИК, ТҮҮНИЙ ХЭРЭГЛЭЭ

Бүлэглэсэн өгөгдлийг боловсруулахад заримдаа хуримтлагдсан давтамжийн графикийг ашиглавал тохиромжтой. Хуримтлагдсан давтамжийн графикаас тухайн өгөгдлийн медиан, квартилийг олоход хялбар, дүрслэхэд ойлгомжтой байдаг.
Тухайн утгаас бага утгатай давтамжуудын нийлбэрийг хуримтлагдсан давтамж гэнэ.

Жишээ 1. Багш 30 сурагч бүрд 20 бодлого бодох даалгавар өгчээ. Сурагч тус бүрийн бодсон бодлогын тоог дор харуулав. 0, 3, 4, 5, 5, 5, 7, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 12, 12, 12, 13, 13, 14, 14, 15, 16, 16, 17, 17, 17, 18, 19
Өгөгдлийг тоолж, давтамжийг хүснэгтээр харуулъя.

Бодсон бодлогын тоо	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Давтамж (сурагчийн тоо)	1	0	0	1	1	3	0	1	1	3	2	2	3	2	2	1	2	3	1	1	0
Хуримтлагдсан давтамж						6															

Асуулт. Хэдэн хүүхэд 5-аас хэтрэхгүй бодлого бодсон бэ? Яаж олох вэ?
Хариулт: Бодсон бодлогын тоо нь 0, 1, 2, 3, 4, 5 байх сурагчийн тоонуудын (давтамжийн) нийлбэртэй тэнцүү 1+0+0+1+1+3=6 байна. (Будсан нүднүүдийг хар.)

Асуултын 5-ын оронд 0, 1, 2, …, 19, 20 гэсэн тоонууд байхад төсөөтэйгээр бодож хүснэгтийг нөхвөл

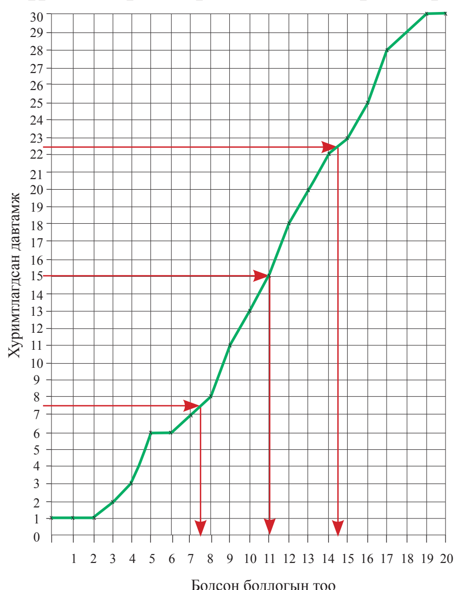
Бодсон бодлогын тоо	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Хуримтлагдсан давтамж	1	1	1	2	3	6	6	7	8	11	13	15	18	20	22	23	25	28	29	30	30

Энд олсон тоо бүр хуримтлагдсан давтамж болно.

Тодорхойлолт. Хуримтлагдсан давтамжуудаар үүссэн хүснэгтийг **хуримтлагдсан давтамжийн хүснэгт** гэнэ. Хуримтлагдсан давтамжийн хүснэгтээр байгуулсан шугаман диаграммыг **хуримтлагдсан давтамжийн график** гэнэ.

Жишээ 1-ийн өгөгдлөөр хуримтлагдсан давтамжийн график байгуулъя. Хэвтээ тэнхлэг дээр сурагчдын бодсон бодлогын тоо 0-20, босоо тэнхлэг дээр сурагчдын тоог харуулсан

0-30 тоогоор хуваарь гаргана. Хүснэгтэд өгсөн цэгүүдээ тэмдэглэж, зэргэлдээ цэг бүрийг хэрчмээр холбовол дараах график гарна.



Хуримтлагдсан давтамжийн график байгуулах дүрэм:

1. Босоо тэнхлэг дээр хуримтлагдсан давтамж, хэвтээ тэнхлэг дээр өгөгдлийн авч болох утгуудыг авна.
2. Бүлэглэж байгаа завсрын дээд хилүүд дээр цэгээ тэмдэглэнэ.
3. Тэмдэглэсэн цэгүүдийг дэс дараалан (ихэнхдээ хэрчмээр) холбож хуримтлагдсан давтамжийн графикийг байгуулна.

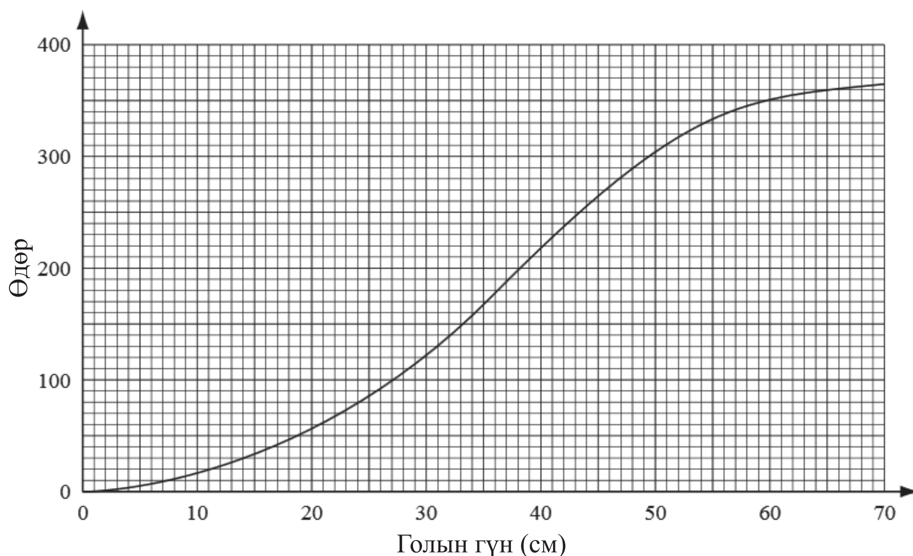
Хуримтлагдсан давтамжийн график нь шугаман графикаас ялгаатай. Үүнд:

- Зурсан график хэвтээ тэнхлэгийн эерэг чиглэлд үл буурна.
- Хуримтлагдсан давтамжийн графикийн хамгийн оройн цэгийн ординат нь нийт хуримтлалын хэмжээг заана.

График дээр нийт давтамжийн хагаст харгалзах утга нь медиан болно. Нийт давтамжийн 25% ба 75%-д харгалзах утга нь нь харгалзан доод, дээд квартилууд болно.

Жишээ дээр сурагчийн тоо 30, түүний хагас буюу 15-д харгалзах бодлогын тоо 11 тул медиан нь 11 болно. 30-ийн 25% буюу 7.5 - д 7.5 харгалзах тул доод квартил 7.5 байна. 30-ийн 75% буюу 22.5-д 14.5 харгалзах тул дээд квартил 14.5 байна. (Зурагт сумаар тэмдэглэв.) Энэ нь хуримтлагдсан давтамжийн графикийн нэг давуу тал болно.

18. Голын гүн (см)-ийг нэг жил (365 хоног) -ийн турш өдөр бүр бүртгэжээ. Үр дүнг хуримтлагдсан давтамжийн графикаар харуулсан байна.



а. Хуримтлагдсан давтамжийн график ашиглаад голын гүний медиан ба квартил хоорондын далайцыг ол.
б. Гол 25 см-ээс дээш гүн байсан өдрийн тоог ол.
в. Давтамжийн хүснэгтийг дор байгуулсан байна. p=47, q=15 болохыг харуул.

Голын гүн	$0<d\le10$	$10<d\le20$	$20<d\le30$	$30<d\le40$	$40<d\le50$	$50<d\le60$	$60<d\le70$
Өдрийн тоо	17	41	62	98	85	p	q

г. Хүснэгт болон p, q - ийн утгыг ашиглан голын гүний дундаж утгыг ол.
д. Дараах хүснэгтийг ашиглаад $20<d\le40$ завсрын өндрийг 8 см байхаар гистограмм зур. Бусад баганын өндрийг хэдэн см байхаар зурах вэ?

Голын гүн	$0<d\le20$	$20<d\le40$	$40<d\le70$
Өдрийн тоо	58	160	147

19. Математикийн олимпиадад өрсөлдсөн 40 оролцогчийн онооны дүнг харуулав. 25, 22, 16, 15, 15, 10, 9, 8, 7, 7, 7, 7, 6, 6, 5, 5, 5, 5, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 0, 0, 0
а. Дараах хүснэгтийг нөх.

Оноо	0	1	2	3	4	5-7	8-14	15-20	20-25
Давтамж									
Хур. давтамж									

б. Давтамжаар гистограмм байгуул.
в. Хуримтлагдсан давтамжийн график байгуул.
г. Медиан, квартилууд, квартил хоорондын далайцыг ол.
д. Нэг багийн гурван оролцогчийн авсан 2, 4, 22 оноонууд хоёр квартилийн хооронд орших уу?

20. 40 хүнтэй байгууллагын нэг өглөөний ирцийн бүртгэлийг харуулав.Үүнд: t-ажилдаа ирсэн цаг (минутаар), n -давтамж

t	7:30-7:40	7:40-7:45	7:45-7:50	7:50-7:54	7:54-7:57	7:57-7:59	7:59-8:00
n	2	3	5	6	7	8	9

а. Гистограмм байгуул.
б. Хуримтлагдсан давтамжийн хүснэгтийг нөх.

... цагаас өмнө ирсэн	-7:40	-7:45	-7:50	-7:54	-7:57	-7:59	-8:00
Хур. давтамж							

в. Хуримтлагдсан давтамжийн график байгуул.
г. Медианыг ол.
д. Квартилууд ба квартил хоорондын далайцыг ол.
е. 7:58 цагт ирсэн ажилтан квартилуудын хооронд багтах уу?

21. 144 хүний жинг хэмжиж, хүснэгтээр харуулжээ.

Биеийн жин (кг)	<40	<50	<60	<65	<70	<90
Хуримтлагдсан давтамж	0	12	34	64	92	144

а. Хуримтлагдсан давтамжийн график байгуул.
б. 64 хүн x кг-аас илүү жинтэй. Графикаа ашиглаад x-ийг ол.
в. Жингийн арифметик дунджийг ол.

12.5. ЦЭГЭН ДИАГРАММ, ХАНДЛАГЫН ШУЛУУН, КОРРЕЛЯЦ

Хураан авах чанар сайтай улаан буудайн хэмжээ хэдийд унасан тунадаснаас яаж хамаарах вэ?

- Улаан буудайн хэмжээ ба 11 дүгээр сард унасан цасны хэмжээ
- Улаан буудайн хэмжээ ба 8, 9 дүгээр сард орсон борооны хэмжээ
- Улаан буудайн хэмжээ ба 5, 6 дугаар сард орсон борооны хэмжээ

Ялгаатай хоёр өгөгдлийн хамаарлыг судлах хэрэгцээ их байдаг. Тэнцүү ширхэг утгатай хоёр өгөгдлийн харгалзах хос утгуудыг координатын хавтгай дээр цэгээр дүрсэлж болно. Уг дүрслэлийг **цэгэн диаграмм** гэнэ.

Нэг өгөгдлийн тоон утга өсөхөд нөгөө өгөгдлийн тоон утга өсөх (буурах) хандлагатай байвал тэр хоёр өгөгдлийг эерэг (сөрөг) корреляцтай гэдэг.

Нэг өгөгдлийн өсөлт бууралт нь нөгөө өгөгдлийн өсөлт бууралтад нөлөөлөхгүй байвал 0 корреляцтай гэнэ.

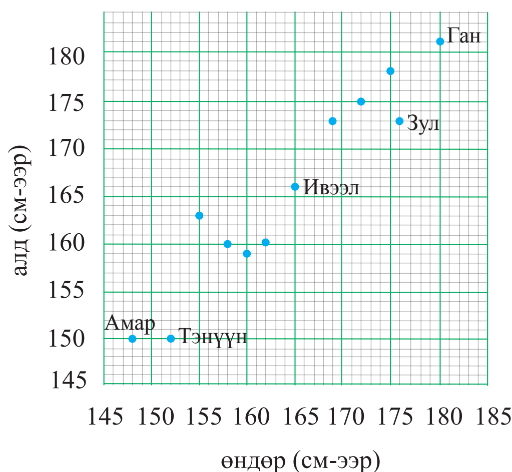
Цэгэн диаграммын хувьд цэгүүд хүртэлх зайн нийлбэр хамгийн бага байх шулууныг **хандлагын шулуун** гэнэ. Корреляц хамааралтай үед л хандлагын шулуун зурагддаг.

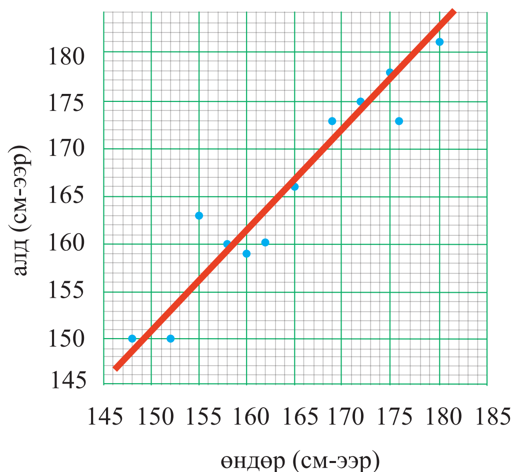
Жишээ 1. 12 хүний өндөр, алд (гараа тэнийлгэн алдалсан хэмжээ) хоёрыг хэмжив.

	Амар	Ган	Сэргэлэн	Оттон	Билгүүн	Зул	Ивээл	Тэнүүн	Нандин	Намуун	Хүслэн	Тэмүүлэн
Өндөр (см)	148	180	155	169	175	176	165	172	162	158	160	152
Алд (см)	150	183	163	173	180	173	166	175	160	160	159	150

Энэ хоёр өгөгдлөөр цэгэн диаграмм байгуул. Хандлагын шулууныг тат.

Бодолт. Бодолтыг зургаар харуулав.

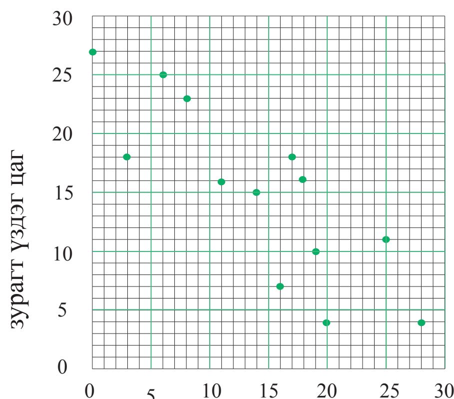


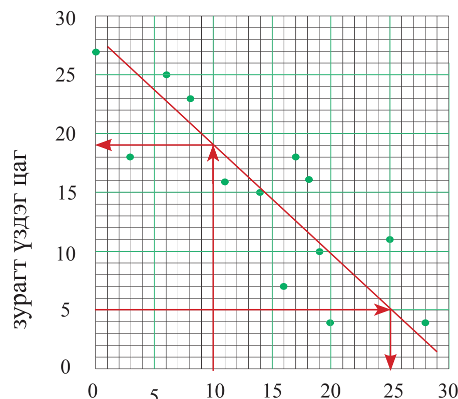


Эндээс өндөр ихсэхэд алд мөн ихсэх хандлагатай учир хоёр өгөгдөл эерэг корреляцтай гэсэн дүгнэлт хийж болно.

Цэгэн диаграммын хандлагын шулуун нь цэгүүдийн хооронд татагдсан, өгөгдлүүдийн хамаарлын ерөнхий төрхийг харуулсан шулуун байна.
Хандлагын шулууны хэрэглээг дараах жишээгээр харуулъя.

Жишээ 2. Сурагчийн долоо хоногийн спортоор хичээллэх болон зурагт үзэх цагийг бүртгэж, цэгэн диаграмм байгуулжээ. (Эхний зураг)





а) Хандлагын шулууныг зурж корреляцийг үнэл.
б) Спортоор 10 цаг хичээллэх сурагч хэдэн цагийн турш зурагт үзэх боломжтой вэ?
в) Зурагт үзэх цагаа 5 цаг болговол спортоор хэдэн цагийн тушр хичээллэх боломж нээгдэх вэ?

Бодолт.

а) Хоёр дахь зургийг хар. Хандлагын шулууныг бид одоохондоо баримжаагаар зурна. Хоёр өгөгдөл сөрөг корреляцтай байна.
б) Хэвтээ тэнхлэгийн 10 гэсэн хуваарийг дайруулан босоо тэнхлэгтэй параллел шулуун татаж, хандлагын шулуунтай огтлолцсон цэгийн ординатыг олно. Тэр нь энэ тохиолдолд 19 цаг гэж харагдаж байна.
в) Босоо тэнхлэгийн 5 гэсэн хуваарийг дайруулан хэвтээ тэнхлэгтэй параллел шулуун татаж, хандлагын шулуунтай огтлолцсон цэгийн абсцессыг олно. Тэр нь энэ жишээ дээр 25 цаг гэж харагдаж байна.

22. Эерэг, сөрөг, 0 корреляцтай тус бүр хоёр хос өгөгдлийн жишээ гаргаж тайлбарла.

23. Хэрэв дараах хос өгөгдлийг цэгэн диаграммаар дүрсэлсэн гэж бодвол ямар корреляцтай вэ? Хариултаа тайлбарла.
- а) Ангийн сурагчдын өндөр ба жин
- б) Агаарын температур ба ангийн сурагчийн тоо
- в) Хур тунадасны хэмжээ ба өвсний ургалт
- г) Хүний унтах ба инээх хугацаа
- д) Гадуур зугаацах хугацаа ба хичээлийн дүн

24. Хоёр хичээлийн шалгалтын дүнг харуулжээ.

Нэрс	Математик	Физик
Алдар	14	21
Бат	16	32
Ганхүү	12	18
Дэлгэр	15	33
Жавзан	19	41
Зоригт	22	52

Нэрс	Математик	Физик
Одноо	19	41
Сугар	25	61
Сэргэлэн	23	54
Түвшин	18	42
Туяа	22	22
Тэргэл	17	41

а) Энэ өгөгдлөөр цэгэн диаграмм байгуул.

б) Хандлагын шулууныг баримжаалан зур.

в) Хоёр өгөгдөл ямар корреляц хамааралтай вэ?

г) Нэгэн сурагчийн математикийн хичээлийн дүн мэдэгдэж байвал түүний физикийн дүнг урьдчилан таамаглаж болох уу?

25. Нэгэн компанийн утсаар ярих хугацаа ба түүнд харгалзах нэг минутын үнийн тарифыг бичсэн байна.

Ярих хугацаа (мин)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Үнэ (₮)	100	92	80	65		55	50	48	45

а) Хэвтээ тэнхлэг-ярих минут, босоо тэнхлэг-үнэ гэж үзээд өгөгдлийн цэгэн диаграммыг зур.

б) Ярих хугацаа ба үнэ хоёрын хоорондоо ямар хамаарал байна вэ?

в) Хандлагын шулууныг баримжаалан зур.

г) 5 минут ярьсан хүн хэдэн төгрөг төлөх вэ?

26. Сурагч Тэргэлийн тухайн сарын нэг өдөрт гэрийн даалгаварт зарцуулсан хугацаа (*T*-минутаар) ба тухайн сарын шалгалтуудын дүнг (*D*-оноо) арифметик дунджаар үзүүлэв.

Сар	IX	X	XI	XII	I	II	III	IV	V	VI
T	35	38	40	15	39	8	10	14	26	48
D	73	73	71	70	66	66	69	70	72	75

а) Гэрийн даалгаварт зарцуулсан хугацааны хамгийн бага ба хамгийн их утга хэд вэ? Эндээс далайцыг тооц.

б) *T* ба *D*-ийн харгалзах утгуудаар цэгэн диаграмм байгуул.

в) Энэ хоёр өгөгдөл (*T* ба *D*) ямар корреляц хамааралтай вэ?

27. Сурагч Тэргэлийн тухайн сарын нэг өдөрт компьютер тоглоом тоглоход зарцуулсан хугацаа (арифметик дундаж *K*, минутаар) ба тухайн сарын шалгалтуудын дүн (арифметик дундаж *S*, оноогоор) үзүүлэв.

Сар	IX	X	XI	XII	I	II	III	IV	V	VI
K	12	43	23	35	38	47	42	26	34	20
S	73	73	71	70	66	66	69	70	72	75

а) *K* ба *S* өгөгдлөөр цэгэн диаграмм байгуул.

б) Энэ хоёр өгөгдөл (*K* ба *S*) ямар корреляц хамааралтай вэ?

28. Өмнөх хоёр бодлогын өгөгдлүүдийн хамаарлаас ямар дүгнэлтийг хийх вэ? Үндэслэлээ тайлбарла.

29. Адил насны 10 сурагчийн өндөр ба алхмын уртыг хэмжиж өндрийн дундаж 163.8 см, далайц 24 см гэж тооцоолжээ.

Сурагчийн нэр	А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И
Өндөр (см)	154	156	164	178	162	170	154	168	168	160
Алхмын урт (см)	45	55.5	67.5	78	57	69	52.5	75	61.5	66

а. Алхмын дундаж ба далайцыг ол.

б. Өгөгдлөөр цэгэн диаграмм байгуулж, хандлагын шулууныг баримжаалан зур. Ямар корреляцтай вэ?

в. Хандлагын шулууныг ашиглан 50 см алхамтай хүүхэд ойролцоогоор ямар өндөртэй байхыг ол.

г. 160 см өндөр хүүхэд хэдэн см алхамтай байх боломжтой вэ?

30. "Да хүрээ" захаас "PRIUS-20" маркийн 10 машины үнийг судалж тэмдэглэв.

Нас (жилээр)	7	8	12	14	2	3	1	0	11	6
Үнэ (сая ₮)	6	8	2	4	11	13	14.5	30	13	14

а. Дараах давтамжийн хүснэгтүүдийг нөхөж, гистограммаар харуул.

Нас (жилээр)	0-4	5-9	10-14
Давтамж			

Үнэ (сая ₮)	2-7	7-12	12-14	14-30
Давтамж				

б. Анхны хүснэгтийн өгөгдлөөр цэгэн диаграмм зур.

в. Машины үнэ, нас хоёр ямар корреляц хамааралтай вэ?

г. Хандлагын шулууныг баримжаалан зур.

д. Хандлагын шулуунаа ашиглаад 9 жил хэрэглэгдсэн машин ойролцоогоор ямар үнэтэй байхыг тогтоо.

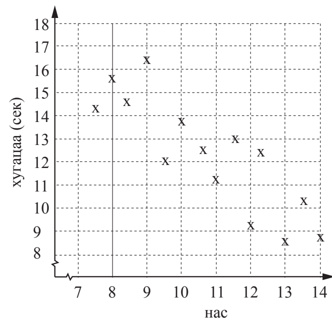
е. Хандлагын шулуунаа ашиглаад 10 сая төгрөгийн үнэтэй машин ойролцоогоор хэдэн жилийн настай байж болохыг тогтоо.

31. Янз бүрийн насны 15 хүүхдээс 60 метрийн зайн гүйлтийн сорил авав. Үр дүнг цэгэн диаграммаар харуулжээ.

а. Хандлагын шулууныг баримжаалан зур.

б. Корреляц хамаарлыг (эерэг, сөрөг, тэг) тогтоо.

в. Хүүхдийн нас өөрчлөгдөхөд хугацаа хэрхэн өөрчлөгдөж байгааг тайлбарла.



БҮЛГИЙН НЭМЭЛТ ДААЛГАВАР

1. 16 , 25, 16, 12, 17, 15, 28, 18, 21, 23 өгөгдлийн медианыг ол.

2. 6, 2, 2, 3, 3, 6, 3, 5, 6, 2, 3, 1, 4, 5, 1 өгөгдлийн квартилууд ба квартил хоорондын далайцыг ол.

3. 60 сурагчаас 30 даалгавартай шалгалт авсны дүнг бүлэглэсэн хэлбэрээр өгчээ.

Бодсон бодлогын тоо	0-5	6-0	11-15	16-20	21-25	26-30
Давтамж (сурагчдын тоо)	6	3	1	24	17	9

а. Моод бүлгийг ол.

б. 10-аас бага бодлого бодсон сурагчийн тоо хэд вэ?

в. 15, 20, 25, 30-аас бага бодлого бодсон сурагчдын тоо хэд вэ? Дээрхтэй төсөөтэй аргаар бодож, хуримтлагдсан давтамжийн хүснэгт байгуул.

г. Хуримтлагдсан давтамжийн график байгуул.

д. График дээрээ медиан, квартилуудыг дүрсэл.

4. Нийслэлийн Баянгол дүүргийн сургуулийн багш нарын тоог харуулав. (1212.mn)
108, 56, 99, 110, 56, 95, 73, 78, 48, 40, 73, 31, 86, 141, 71, 195, 143, 37, 27, 21, 7, 9, 8, 14, 8, 12, 1, 17, 9, 16, 7, 21, 3, 13, 2, 6, 16, 4, 31, 8, 8, 0, 27, 30

а. Дараах хүснэгтийг нөхөхдөө хэд хэдэн алдаа гаргажээ. Алдааг залруул.

Багшийн тоо	<10	<20	<50	<100	<200
Сургуулийн тоо	12	7	10	9	5

б. Давтамжийн ба хуримтлагдсан давтамжийн хүснэгтийн ялгааг гаргаж, дахин байгуул.

в. Гистограмм байгуул.

г. Хуримтлагдсан давтамжийн график байгуул.

д. Графикаас квартилууд ба медианыг ол.

5. 12 сурагч асуултад хариулжээ. Тэдний хариулсан хугацаа болон зөв хариултын тоог хүснэгтээр харуулав.

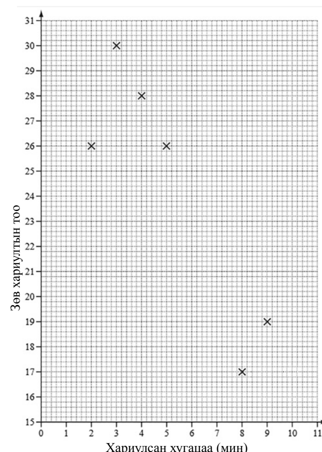
Хариулсан хугацаа (мин)	9	4	5	10	3	2	8	8	4	5	6	7
Зөв хариултын тоо	19	28	26	17	30	26	25	20	23	21	24	22

а. Эхний 6 хос тоог цэгэн диаграммд дүрслэхдээ нэг алдаа гаргажээ. Алдааг залруулж, үлдсэн 6 цэгийн хамт дэвтэртээ цэгэн диаграммыг байгуул.

б. Ямар корреляцтай вэ?

в. Даалгавар гүйцэтгэсэн хугацааны арифметик дундаж ба далайцыг ол.

г. Зөв хариултын моод ба медианыг ол.



6. Дараах өгөгдөлд статистик тооцоо хийж, дүгнэлт гарга. Тохиромжтой диаграммаар дүрсэл.

Аймаг	Улаанбаатар хотоос алслагдах зай (км)	Сурагчдын тоо (мянга, 2016 оны байдлаар)	Сургуулийн тоо (2016 оны байдлаар)
Баян-Өлгий	1760	22.6	43
Говь-Алтай	1005	11.3	28
Завхан	984	14.6	30
Увс	1336	17.4	30
Ховд	1580	18.1	25
Архангай	465	17.3	33
Баянхонгор	640	15.7	29
Булган	330	9.7	22
Өвөрхангай	430	21.2	30
Хөвсгөл	671	25.5	36
Орхон	371	18.6	22
Дорноговь	456	12.3	21
Дундговь	260	8.1	19
Өмнөговь	553	11.4	20
Сэлэнгэ	335	18.8	34
Төв	45	14.4	31
Дархан-Уул	219	19.0	26
Говьсүмбэр	230	3.3	5
Дорнод	655	14.3	26
Сүхбаатар	560	10.7	16
Хэнтий	330	13.9	26
Улаанбаатар	0	232.8	226

XIII БҮЛЭГ. КОМБИНАТОРИК

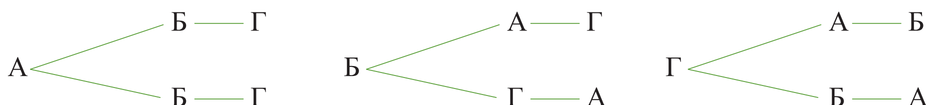
Энэ бүлэг сэдвийг судалснаар дараах мэдлэг, чадваруудыг эзэмшинэ.

- *Факториалын томьёо мэдэх, хэрэглэх*
- *Сэлгэмлийн тоог томьёо хэрэглэн тооцоолох*
- *Хэсэглэлийн тоог томьёо хэрэглэн тооцоолох*

13.1. ФАКТОРИАЛ

Жишээ 1. Ялгаатай 4 номыг тавиур дээр нэг эгнээнд хэчнээн янзаар байрлуулж болох вэ?

Бодолт. Эхлээд А, Б, Г гурван номыг нэг эгнээнд байрлуулах боломжийн тоог олох бодлогыг авч үзэх хэрэгтэй. Үүний тулд дараах модны схемийг ажиглацгаая.



Эндээс 3 ялгаатай номыг нэг эгнээнд байрлуулах боломжийн тоо 6 гэсэн дүгнэлт гарч байна. Одоо 4 ялгаатай номыг нэг эгнээнд байрлуулах боломжийн тоог олоход хялбар боллоо.

Эхний байрт 4 номын аль нэгийг байрлуулсны дараа үлдсэн 3 номыг 6 янзаар байрлуулж болохыг дараах зургаас харж болно. Эндээс 4 ялгаатай номыг нэг тавиур дээр байрлуулах боломжийн тоо үржвэрийн зарчмаар $4\cdot6=4\cdot3\cdot2\cdot1$ буюу 24 байна.

1-ээс 4 -ийг оролцуулсан бүх натурал тооны үржвэрийг 4! гэж тэмдэглээд 4-ийн факториал гэж уншдаг. 1-ээс n-ийг оролцуулан бүх натурал тооны үржвэрийг $n!$ гэж тэмдэглээд n-ийн факториал гэж уншдаг.

Жишээ 2. Ангийн 8 сурагчийг нэг эгнээнд хэчнээн янзаар жагсааж болох вэ?

Бодолт. Эхэнд зогсох сурагчийг сонгох 8 боломж, дараагийн сурагчийг сонгох 7 боломж, 3 дахь сурагчийг сонгох 6 боломж гэх мэтээр хамгийн сүүлд зогсох сурагчийг сонгох 1 боломж байна. Иймээс олох ёстой тоо үржвэрийн зарчмаар $8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=8!=40320$ болно.

Ерөнхий тохиолдолд n ширхэг ялгаатай зүйлийг нэг эгнээнд өрөх ялгаатай боломжийн тоо үржвэрийн зарчмаар $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot2\cdot1=n!$ буюу n-ийн факториалтай тэнцүү байна.

Эндээс натурал тооны факториалыг бодох рекуррент томьёо $n!(n+1)=(n+1)!$ байх нь мөрдөн гарч байна.

Жишээ 3. $\frac{39!}{37!\cdot 2!}$ илэрхийллийн утгыг ол.

Бодолт. $\frac{39!}{37!\cdot 2!}=\frac{39\cdot 38\cdot 37!}{37!\cdot 2!}=39\cdot 19=741$

13.2. СЭЛГЭМЭЛ БА ХЭСЭГЛЭЛ

Жишээ 4. а) 5 ялгаатай номоос 3-ыг сонгон авч тавиур дээр хэдэн янзаар өрж болох вэ?
б) 5 ялгаатай номоос 3-ыг хэдэн янзаар сонгож болох вэ?

Бодолт. а)

I ном	II ном	III ном

I номыг 5 янзаар, II номыг 4 янзаар, III номыг 3 янзаар өрж болох учраас үржвэрийн зарчмаар нийт $5\cdot 4\cdot 3=60$ янзаар өрж болно.

б) 3 номыг сонгон аваад өрөхгүй гэдгийг анхаарья. Тэгээд 3 номыг сонгох арга бүрд эдгээр 3 номыг нэг эгнээнд өрөх $3\cdot 2\cdot 1=6$ ширхэг боломжийг харгалзуулж болно. Эндээс 5 ялгаатай номоос 3-ыг сонгох боломжийн тоог x гэж тэмдэглэвэл $x\cdot 3!=60$ гэж гарна. Учир нь 5 номоос 3-ыг сонгоод өрөх ялгаатай боломжийн нь x -ээс 3!=6 дахин их юм.

Иймээс олох ёстой тоо $x=\frac{60}{3!}=\frac{60}{6}=10$ байна.

Тодорхойлолт. n ялгаатай зүйлээс $m(m\le n)$ ширхгийг сонгож нэг эгнээнд байрлуулсныг n-ээс m-ээр авсан **сэлгэмэл** гэдэг.

n-ээс m-ээр авсан ялгаатай бүх сэлгэмлийн тоог A_n^m гэж тэмдэглэдэг бөгөөд энэ тоо нь үржвэрийн зарчмаар $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)$-тай тэнцүү байна. Үүнийг факториалын тэмдэг хэрэглэн товчилж бичвэл

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$$

болно. A_n^m-ийг n-ээс m-ээр авсан сэлгэмлийн тоо гэж уншдаг.

Тухайн тохиолдолд, n ялгаатай зүйлсийг нэг эгнээнд байрлуулсныг n-ээс n-ээр авсан сэлгэмэл гэх ба иим бүх сэлгэмлийн тоог заримдаа P_n гэж тэмдэглэдэг. Иймээс $P_n=n!$ байна.

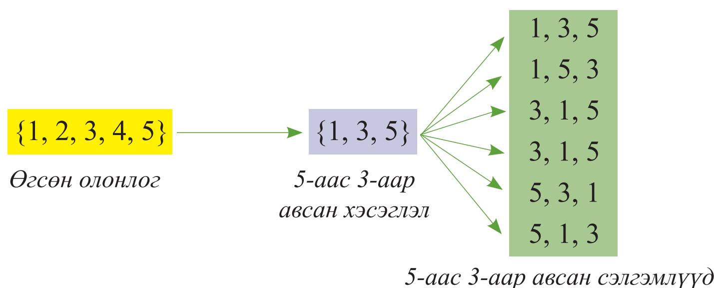
Санамж 0!=1 гэж үздэг. Учир нь n ялгаатай зүйлсийг нэг эгнээнд байрлуулах бүх боломжийн тоо $A_n^n=\frac{n!}{(n-n)!}=\frac{n!}{0!}=n!$ байдаг.

Жишээ 5. 6 номоос 4 - ийг сонгон тавиур дээр хэдэн янзаар өрж болох вэ?

Бодолт. Олох ёстой тоо нь 6-аас 4-өөр авсан сэлгэмлийн тоотой тэнцүү. Иймээс $A_6^4=\frac{6!}{2!}=6\cdot 5\cdot 4\cdot 3=360$ янзаар өрж болно.

Тодорхойлолт. n элементтэй олонлогоос зохиосон $m(m \le n)$ элементтэй дэд олонлогийг n-ээс m-ээр авсан **хэсэглэл** гэдэг бөгөөд ийм бүх ялгаатай дэд олонлогийн тоог C_n^m гэж тэмдэглээд n-ээс m-ээр авсан хэсэглэлийн тоо гэж уншдаг.

Энэ тоо $C_n^m = \frac{A_n^m}{m!}$-тай тэнцүү байна. Учир нь A_n^m нь C_n^m-ээс $m!$ дахин их юм. Доорх зургаас $n = 5, m = 3$ тохиолдолд $A_5^3 = C_5^3 \cdot 3!$ байхыг харж болно.



5-аас 3-аар авсан сэлгэмлүүд

Хэсэглэлийн тоог факториалын тэмдэг хэрэглэн товчилж бичвэл $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ болно.

Жишээ 6. 10 сурагчаас 3 сурагчтай багийг хэчнээн янзаар бүрдүүлж болох вэ?

Бодолт. Олох ёстой тоо нь 10-аас 3-аар авсан хэсэглэлийн тоотой тэнцүү. Иймээс 3 сурагчтай багийг $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 120$ янзаар бүрдүүлж болно.

Санамж n-ээс m-ээр авсан хэсэглэл ба n-ээс m-ээр авсан хэсэглэлийн тоо гэсэн хоёр ухагдахуун ялгаатай гэдгийг анхаар.

Жишээ 7. а. Шулуун дээр n ширхэг цэг тэмдэглэхэд нийт хэдэн хэрчим үүсэх вэ?

б. Дараах зурагт нийт хэдэн тэгш өнцөгт байгааг хэрхэн хялбар аргаар тоолж болох вэ?

в. Тэгш өнцөгтийн талууд дээр харгалзан n ба m ширхэг цэг тэмдэглээд эдгээрийг дайруулан тэгш өнцөгтийн талуудтай параллел шулуунууд татав. Тэгвэл эдгээр шулуун болон тэгш өнцөгтийн талуудын огтлолцол дээр оройтой нийт хэдэн тэгш өнцөгт байх вэ?

Бодолт.

а. Хос цэг сонгох бүрд эдгээр цэгт төгсгөлтэй нэг хэрчим тоологдоно. Иймээс нийт хэрчмийн тоо C_n^2 буюу $\frac{n(n-1)}{2}$ - тай тэнцүү.

б. Зураг дээрх тэгш өнцөгтийн хэвтээ талын дагуу байрлах 5 цэгээс 2-ыг, босоо талын дагуу байрлах 4 цэгээс 2-ыг сонгох бүрд нэг тэгш өнцөгт тоологдож

байна. Иймээс үржвэрийн зарчмаар нийт $C_5^2 \cdot C_4^2 = 10 \cdot 6 = 60$ тэгш өнцөгт байхыг хялбархан тооцоолж болно.

в. Өмнөх бодлоготой ижлээр сэтгэвэл нийт $C_n^2 \cdot C_m^2 = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{m(m-1)}{2}$ тэгш өнцөгт байна гэсэн дүгнэлт гарч байна.

Жишээ 8. Бат математикийн 3, физикийн 4, монгол хэлний 5 нийт 12 дэвтэртэй байв. Бат өглөө хичээлдээ математикийн дэвтрээс 2-ыг, физикийн дэвтрээс 2-ыг, монгол хэлний дэвтрээс 3-ыг авч явах хэрэгтэй болсон бол дэвтрүүдээ нийт хэдэн янзаар сонгон авч явж болох вэ?

Бодолт. Математикийн 3 дэвтрээс 2-ыг сонгох боломжийн тоо $C_3^2 = 3$ байна.

Физикийн 4 дэвтрээс 2-ыг сонгох боломжийн тоо $C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$ байна.

Монгол хэлний 5 дэвтрээс 3-ыг сонгох боломжийн тоо $C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = 10$ учраас 12 дэвтэр сонгох нийт боломжийн тоо үржвэрийн зарчмаар $3 \cdot 6 \cdot 10 = 180$ болно.

1. n-ээс 1, 2, 5, n–1, n-ээр авсан сэлгэмлийн тоо оролцсон жишээ зохиогоорой.
2. Дараах илэрхийллүүдийг тооцоол.
   а) A_9^6 б) A_8^2 в) A_{10}^7
3. 6 сурагчаас 3-ыг сонгож нэг эгнээнд жагсаах аргын тоо хэд байх вэ?
4. n-ээс m-ээр авсан сэлгэмэл ба n-ээс m-ээр авсан хэсэглэл гэсэн хоёр ухагдахуун ямар ялгаатай вэ?
5. n-ээс 1, 2, 3, n-ээр авсан хэсэглэлийн тоо оролцсон жишээ зохиогоорой.
6. C_n^0, C_n^n тоонууд хэдтэй тэнцүү вэ? Учрыг нь тайлбарла.
7. Дараах илэрхийллүүдийг тооцоол.
   а) C_{14}^5 б) C_8^5 в) C_{12}^8
8. Ангийн 20 сурагчаас 2 сурагчийг жижүүрээр томилох хэчнээн ялгаатай арга байх вэ?
9. $C_{20}^2 = C_{20}^{18}, C_{20}^3 = C_{20}^{17}, C_{20}^k = C_{20}^{20-k}$, $0 \le k \le 20$ гэж харуул.
10. Хэрэв ангийн 20 сурагчийн 13 нь эрэгтэй сурагч бол
    а) 5 эрэгтэй, 3 эмэгтэй сурагчтай багийг хэчнээн янзаар сонгон авч болох вэ?
    б) 3 эрэгтэй, 5 эмэгтэй сурагчтай багийг хэчнээн янзаар сонгон авч болох вэ?
    в) Эрэгтэй сурагчийн тоо эмэгтэй сурагчийн тооноос их байхаар 4 сурагчтай багийг хэчнээн янзаар сонгон авч олох вэ?
11. Ангид 40 ширээ байв. Ширээ бүрд зөвхөн нэг хүүхэд суусан байхаар 5 сурагчийг хэчнээн ялгаатай аргаар суулгаж болох вэ?
12. Гүдгэр 20 өнцөгт хэдэн диагональтай вэ?
13. Хэрэв 11А анги n, 11Б анги m сурагчтай бол анги бүрээс 2 сурагч оролцсон 4 сурагчтай комиссыг хэдэн янзаар сонгож болох вэ?
14. Шатрын тэмцээнд n тамирчин оролцож тойргоор тоглов. Нийт хэдэн өрөг тоглох вэ?
15. Хэрэв $(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$ илэрхийллийн хаалтыг задалж үржүүлсний дараа төсөөтэй гишүүдийг эмхэтгэвэл

а. хэчнээн ялгаатай нэмэгдэхүүн гарах вэ?

б. a^3b, a^2b^2, ab^3-ийг агуулсан гишүүдийн өмнөх коэффицент тус бүр хэд байх вэ?

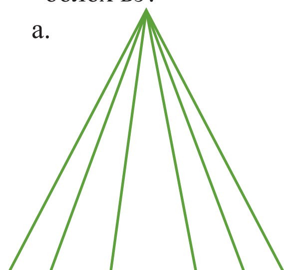
16. $(a+b)(a+b)\ldots(a+b)$ илэрхийлэлд 6 ширхэг хаалт оролцсон бол

а. уг илэрхийллийг үржүүлж төсөөтэй гишүүдийг эмхэтгэхгүйгээр бичвэл a^6, a^5b, a^4b^2 нэмэгдэхүүн тус бүр хэд гарах вэ?

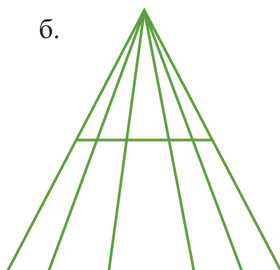
б. Дээрх илэрхийллийг үржүүлж нийлбэр хэлбэртэй бичсэний дараа төсөөтэй гишүүдийг эмхэтгэвэл $a^{6-k}b^k$, a^kb^{6-k}-ийг агуулсан гишүүдийн өмнөх коэффицент тус бүр ямар байх вэ?

17. Дараах зурагт нийт хэчнээн гурвалжин байгааг тоолох ямар хялбар арга байж болох вэ?

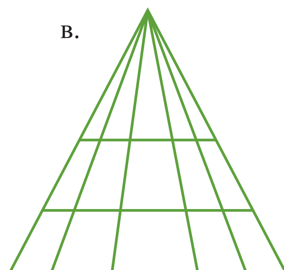
а.



б.



в.



18. Хавтгайд нэг тойрог дээр орших n ширхэг цэг өгөв. Хэрэв эдгээр цэгийн дурын хоёрыг нь хэрчмээр холбовол нийт хэдэн хэрчим үүсэх вэ? Эдгээр цэг дээр оройтой нийт хэчнээн гурвалжин, хэчнээн дөрвөн өнцөгт байх вэ?

19. 20 эрэгтэй сурагчтай ангиас 4 сурагчийг өвлийн өвгөн, чоно, баавгай, алиалагчийн дүрд хэчнээн янзаар сонгож болох вэ?

20. 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9 цифрийг ашиглан цифр давтагдахгүй, таван оронтой тэгш тоо хэдийг зохиож болох вэ?

21. 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9 цифрийг ашиглан цифрүүд нь өсөх эрэмбээр байрласан таван оронтой тоо хэдийг зохиож болох вэ?

22. 2, 3, 4, 5, 6 цифрийг ашиглан цифрүүд нь буурах эрэмбээр байрласан таван оронтой тэгш тоо хэдийг зохиож болох вэ?

23. Шатрын тэмцээнд оролцож буй 10 тамирчныг 5 хосод хувааж эхний тойргийг зохион байгуулах бүх боломжийн тоог ол.

24. Зоосыг дөрвөн удаа орхих туршилтад нийт хэдэн ялгаатай эгэл үзэгдэл илрэх вэ? Ядаж хоёр удаа тоо буух үзэгдэлд нийт хэдэн эгэл үзэгдэл харьяалагдах вэ?

25. Гурван ижил шоог зэрэг орхих туршилтад нийт хэдэн эгэл үзэгдэл илрэх вэ?

Эдгээр шоо а. ижил тоотой нүдээрээ буух

б. ялгаатай тоотой нүдээрээ буух үзэгдлүүдийн магадлалыг ол.

XIV БҮЛЭГ. МАГАДЛАЛ

Энэ бүлэг сэдвийг судалснаар дараах мэдлэг чадварыг эзэмшинэ.

- *Нийцгүй ба нийцтэй үзэгдлүүдийн ялгааг ойлгох*
- *Нийлмэл үзэгдлийн магадлалыг Эйлер-Веннийн диаграмм, үр дүнгийн хүснэгт, модны схем ашиглан тооцоолох*

Аливаа үзэгдэл нь эгэл үзэгдлийн олонлог байна. Хэрэв эгэл үзэгдэл ижил боломжтойгоор илэрдэг бол дурын A үзэгдлийг бүрдүүлэгч эгэл үзэгдлийн тоог мэдсэнээр уг үзэгдлийн илрэх магадлалыг тооцоолж болдог.

Тодорхойлолт. Бүх эгэл үзэгдлийн олонлог Ω нь n ширхэг элементтэй, эдгээр эгэл үзэгдэл ижил боломжтой илэрдэг бөгөөд A үзэгдэлд k ширхэг эгэл үзэгдэл харьяалагддаг бол A үзэгдлийн магадлал $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{k}{n}$ байна.

Үүнийг магадлалын сонгодог тодорхойлолт гэдэг.

Жишээ 1. Хоёр шоог зэрэг орхих туршилтад хоёулаа тэгш нүдээрээ буух үзэгдлийн магадлалыг ол.

Бодолт. Хоёр шоог зэрэг орхих туршилтад үржвэрийн зарчмаар нийт $6\cdot 6=36$ ширхэг ижил боломжтой эгэл үзэгдэл илрэх бөгөөд хоёр шоо хоёулаа тэгш нүдээрээ буух үзэгдэлд (2,2), (4,4), (6,6), (2,4), (2,6), (4,2), (4,6), (6,2), (6,4) гэсэн 9 эгэл үзэгдэл харьяалагдана. Иймээс хоёр шоо тэгш нүдээрээ буух үзэгдлийн магадлал $\frac{9}{36}=\frac{1}{4}=0.25$ болно.

Санамж Дээрх тодорхойлолтыг эгэл үзэгдлүүд ижил боломжтой биш үед хэрэглэж болохгүй. Жишээлбэл: Шагайг нэг удаа орхих туршилтад дөрвөн эгэл үзэгдэл илрэх боловч эдгээр эгэл үзэгдлүүдийн илрэх боломж нь ялгаатай учраас морь, хонь, ямаа, тэмээ буух үзэгдлийн магадлалыг дээрх томьёогоор тооцоолох боломжгүй юм.

14.1. НИЙЦТЭЙ БА НИЙЦГҮЙ ҮЗЭГДЛҮҮД

Бид өмнөх ангиудад ямар нэгэн A үзэгдлийн эсрэг үзэгдлийн магадлалыг $P(A')=1-P(A)$ томьёогоор олж болохыг, мөн A,B үзэгдлүүд нийцгүй буюу эдгээр үзэгдлүүд нэгэн зэрэг илрэх боломжгүй тохиолдолд $A\bigcup B$ үзэгдлийн магадлалыг олохын тулд $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)$ томьёо хэрэглэхийг сурсан билээ.

Жишээ 1. Шоог нэг удаа орхих туршилтад тэгш тоотой нүдээрээ буух, сондгой тоотой нүдээрээ буух хоёр үзэгдэл нийцгүй, харин сондгой тоотой нүдээрээ буух, 3-д хуваагдах тоотой нүдээрээ буух хоёр үзэгдэл нийцтэй байна.

Тодорхойлолт. Нэгэн зэрэг илрэх боломжгүй буюу нэгэн зэрэг харьяалагдах эгэл үзэгдэл олддоггүй үзэгдлүүдийг **нийцгүй** гэнэ. Тодруулбал, $A\bigcap B=\varnothing$ байх A, B хоёр үзэгдэл нийцгүй байна.

Жишээ 2. Хайрцагт улаан, хөх, ягаан, ногоон өнгөтэй бөмбөгнүүд байв. Нэг бөмбөг таамгаар гаргаж ирэх туршилтад гарч ирсэн бөмбөг улаан байх үзэгдэл $A=\{\text{улаан}\}$ ба хөх, ягаан, ногоон өнгөнүүдийн аль нэг байх үзэгдэл $B=\{\text{хөх, ягаан, ногоон}\}$ бол $A\cap B=\varnothing$ учраас бол A, B хоёр үзэгдэл нийцгүй юм.

Тодорхойлолт. Нэгэн зэрэг илрэх боломжтой буюу нэгэн зэрэг харьяалагдах эгэл үзэгдэл олддог үзэгдлүүдийг **нийцтэй** гэнэ. Өөрөөр хэлбэл, $A\cap B\neq\varnothing$ байх A, B хоёр үзэгдэл нийцтэй байна.

Жишээ 3.

а. Шоог нэг удаа орхих туршилтад илрэх тэгш тоотой нүдээр буух ба 5-д хуваагдах нүдээр буух үзэгдлүүд нийцтэй юу? Эдгээр үзэгдлийн ядаж нэг нь илрэх магадлалыг ол.

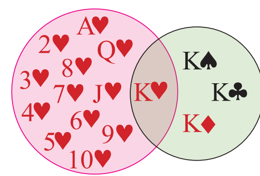
б. Энэ туршилтад илрэх тэгш тоогоор буух, анхны тоогоор буух үзэгдлүүд нийцтэй юу?

Бодолт.

а. Хэрэв тэгш нүдээрээ буух үзэгдлийг T, 5-д хуваагдах нүдээрээ буух үзэгдлийг M гэж тэмдэглэвэл $T=\{2,\ 4,\ 6\}$, $M=\{5\}$ байна. $T\cap M=\varnothing$ учраас энэ хоёр үзэгдэл нийцгүй. Иймээс $P(T\cup M)=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ болно.

б. Хэрэв анхны тоогоор буух үзэгдлийг A гэж тэмдэглэвэл $A=\{2,\ 3,\ 5\}$ ба $T\cap A=\{2\}$ болно. Өөрөөр хэлбэл, тэгш нүдээр буух, анхны тоогоор буух хоёр үзэгдэл нэгэн зэрэг илрэх боломжтой буюу нийцтэй байна.

Жишээ 4. 52 модтой хөзрөөс нэг хөзөр таамгаар сугалах туршилтад бундан хөзөр таарах, ноён хөзөр таарах хоёр үзэгдэл нийцтэй юу?



Бодолт. Бундан хөзөр таарах, ноён хөзөр таарах хоёр үзэгдэл нийцтэй. Учир нь эдгээр үзэгдлүүдэд бундангийн ноён таарах үзэгдэл зэрэг харьяалагдаж байна. Таамгаар нэг хөзөр сугалах туршилтад ижил боломжтой 52 эгэл үзэгдэл илрэх ба бундангийн ноён таарах үзэгдэл нь эгэл үзэгдэл юм. Иймээс уг үзэгдлийн магадлал $\frac{1}{52}$-тэй тэнцүү.

Чанар 1. Нийцгүй A, B, C үзэгдлүүдийн хувьд $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$ томьёо биелнэ.

Баталгаа: A, B үзэгдлүүд нийцгүй учраас $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ томьёо биелэх ба мөн $A\cup B$ ба C үзэгдлүүд нийцгүй байх нь илэрхий. Иймээс $P((A\cup B)\cup C)=P(A\cup B)+P(C)=P(A)+P(B)+P(C)$ болж батлах зүйлээ батлав.

Дээрх нийцгүй гурван үзэгдлийн хувьд биелэх томьёог хэдэн ч нийцгүй үзэгдлийн хувьд өргөтгөж болно. Энэ томьёог **магадлалын нийлбэрийн дүрэм** гэдэг.

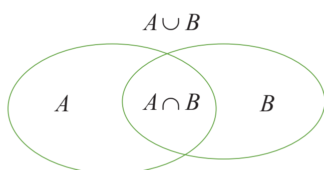
Жишээ 5. Анги 25 сурагчтай бөгөөд 15 сурагч нь сагсан бөмбөг сонирхдог, 12 сурагч нь хөл бөмбөг сонирхдог байв. Хэрэв эдгээрээс өөр спорт сонирхдог сурагч энэ ангид 5 байсан бол таамгаар сонгосон нэг сурагч

а. энэ 2 спортыг хоёуланг нь сонирхдог байх үзэгдлийн магадлалыг,

б. зөвхөн хөл бөмбөг сонирхдог байх үзэгдлийн магадлалыг,

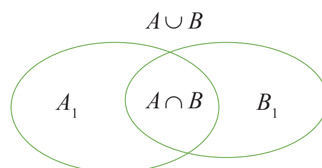
в. зөвхөн сагсан бөмбөг сонирхдог байх үзэгдлийн магадлалыг тус тус ол.

Бодолт. Туршилтын үр дүнд ижил боломжтой 25 эгэл үзэгдэл илэрнэ. Таамгаар сонгосон сурагч сагсан бөмбөг сонирхдог байх үзэгдлийг A, хөл бөмбөг сонирхдог байх үзэгдлийг B гэж тэмдэглэе. Тэгвэл $A\bigcap B$ нь таамгаар сонгосон сурагч эдгээр спортыг хоёуланг нь сонирхдог байх үзэгдэл болох ба $A\bigcup B$ нь таамгаар сонгосон сурагч энэ хоёр спортын ядаж нэгийг сонирхдог байх үзэгдэл болно. Одоо A, B олонлогийн Эйлер-Веннийн диаграммыг дүрсэлье.



Диаграммаас харахад $A\bigcap B$ үзэгдэлд харьяалагдах эгэл үзэгдлүүд A,B үзэгдлүүдэд хоёуланд нь зэрэг харьяалагдаж байна. Иймээс $|A\bigcup B|=20=|A|+|B|-|A\bigcap B|=15+12-|A\bigcap B|$ болох ба эндээс $|A\bigcap B|=7$ болно. Мөн $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$, $P(B)=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{12}{25}$, $P(A\bigcup B)=\frac{|A\bigcup B|}{|\Omega|}=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$ байхыг хялбархан тооцоолж болно.

Дараах Эйлер-Веннийн диаграммд A_1 нь таамгаар сонгосон сурагч зөвхөн сагсан бөмбөг сонирхдог байх үзэгдэл B_1 нь таамгаар сонгосон сурагч зөвхөн хөл бөмбөг сонирхдог байх үзэгдэл ба иймээс $A\bigcup B$ үзэгдэл нь $A_1, B_1, A\bigcap B$ гэсэн нийцгүй гурван үзэгдэлд хуваагдаж байна.



Нэгэнт $|A\bigcap B|=7$ учир $|A_1|=8, |B_1|=5$ байх нь илэрхий.

Иймээс а. $P(A\bigcap B)=\frac{7}{25}$ б. $P(A_1)=\frac{8}{25}$

в. $P(B_1)=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$ болов.

A ба B хоёр үзэгдэл нийцгүй үед $P(A\bigcap B)=0$ байх учир энэ тохиолдолд $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)$ болдог.

Санамж A ба B үзэгдлүүд нийцтэй үед $P(A\bigcap B)\neq 0$ байх ба энэ тохиолдолд дээрх томьёо биелэхгүй.

1. Хэрэв $P(A)=0.2$, $P(B)=0.3$, $P(A\bigcup B)=0.7$ бол A,B хоёр үзэгдэл нийцгүй байж болох уу?
2. Зөвхөн ганц ялагчтай тэмцээнд Анар түрүүлэх магадлал 0.6, Билэгт түрүүлэх магадлал 0.2 , Ганаа түрүүлэх магадлал 0.1 байв.
   а. Анар, Ганаа хоёрын нэг түрүүлэх магадлалыг,
   б. Нэр дурдсан гурван оролцогчийн аль нь ч түрүүлэхгүй байх магадлалыг тус тус ол.
3. 52 модтой багц хөзрөөс нэг хөзөр таамгаар сугалах туршилт хийхэд
   а. гил эсвэл боол хөзөр таарах магадлалыг,

б. 9-өөс дээш эрэмбэтэй хөзөр таарах үзэгдлийн магадлалыг боломж тоолж дараа нь магадлалын нийлбэрийн дүрэм хэрэглэн тус тус ол.

4. Шатрын тэмцээнд оролцогч 20 тамирчны 14 нь I зэрэгтэй, 10 нь эмэгтэй, 6 эмэгтэй тамирчин I зэрэгтэй байв. Таамгаар нэг тамирчин сонгоход
а. эмэгтэй байх, I зэрэгтэй байх үзэгдлүүдийн ядаж нэг нь илрэх магадлалыг,
б. I зэрэгтэй эрэгтэй тамирчин таарах үзэгдлийн магадлалыг тус тус ол.

5. Спортын өдөрлөгт оролцож буй 30 сурагчийн 17 нь хөл бөмбөг тоглодог, 20 нь сагсан бөмбөг тоглодог, 9 нь хөл бөмбөг ч тоглодог, сагсан бөмбөг ч тоглодог байв. Таамгаар нэг сурагч сонгоход
а. зөвхөн хөл бөмбөг тоглодог,
б. энэ спортын алинаар нь ч хичээллэдэггүй байх үзэгдлийн магадлалыг ол.

6. 100 сурагчаас судалгаа авахад 45 нь адал явдлын зохиолд дуртай, 55 нь яруу найрагт дуртай, 25 нь алинд нь ч дуртай биш гэж хариулсан байв. Таамгаар нэг сурагчийг сонгоход тэр нь
а. адал явдлын зохиол ба яруу найргийн ядаж нэгэнд дуртай байх,
б. хэрэв адал явдлын зохиолд дуртай бол тэр нь яруу найрагт дуртай байх,
в. хэрэв яруу найрагт дуртай бол тэр нь адал явдлын зохиолд дуртай байх үзэгдлийн магадлалыг Эйлер-Веннийн диаграмм байгуулж тус тус ол.

14.2. НИЙЛМЭЛ ҮЗЭГДЛИЙН МАГАДЛАЛ

Жишээ 1. Хоёр ижил шоог зэрэг орхих туршилтад нүдний нийлбэр 6-аас ихгүй байх үзэгдлийн магадлалыг ол.

Бодолт. Туршилтад илрэх бүх үр дүнг харуулсан хүснэгт байгуулъя. Хүснэгтээс харахад энэ туршилтад ижил боломжтой нийт 36 ширхэг эгэл үзэгдэл илрэх ба хоёр шооны нийлбэр нүдний тоо 6-аас ихгүй байх эгэл үзэгдлийн тоо 15 байна. Эдгээр үзэгдлийн илрэх боломж тэнцүү тул олох ёстой магадлал $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$ болно.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	12	12

Жишээ 2. Зоос ба шоо орхих туршилтыг авч үзье. Зоос тоогоор, шоо 2-оос олон нүдээр буух үзэгдлийн магадлалыг ол.

Бодолт. Энэ туршилтад нийт $2\cdot 6=12$ эгэл үзэгдэл илрэх ба зоос тоогоор, шоо 2-оос их тоогоор буух үзэгдэлд (тоо, 3), (тоо, 4), (тоо, 5), (тоо, 6) гэсэн ижил боломжтой 4 эгэл үзэгдэл харьяалагдаж байна. Иймээс уг үзэгдлийн магадлал $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ болно. Гэвч нөгөө талаас зоос тоогоор буух үзэгдлийн магадлал $\frac{1}{2}$, шоо 2-оос их тоогоор буух үзэгдлийн магадлал $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ байхыг тооцвол зоос тоогоор, шоо анхны тоогоор буух нийлмэл үзэгдлийн магадлалыг $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ гэж олж болох байв.

Зоос аль талаараа буух нь шоо ямар талсаараа буухад нөлөөлөхгүй, шоо ямар талсаараа буух нь зоос аль талаараа буухад нөлөөлөхгүй.

Тодорхойлолт. Нэгнийх нь илрэх эсэх нь нөгөөгийнхөө илрэх эсэхэд нөлөөлдөггүй үзэгдлүүдийг **үл хамаарах үзэгдлүүд** гэнэ.
A, B үзэгдлүүд дэс дараалан илрэх үзэгдлийн магадлалыг $P(A\cap B)$ гэж тэмдэглэдэг.
Үл хамаарах үзэгдлүүдийн хувьд $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ томьёо биелнэ.

Чанар 2. Үл хамаарах A, B, C үзэгдлүүдийн хувьд $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$ томьёо биелнэ.

Баталгаа: A, B, C үзэгдлүүдийн аль нэгний илрэх эсэх нь бусад үзэгдлийн илрэх эсэхэд нөлөөлөхгүй учраас $A\cap B, C$ үзэгдлүүд үл хамаарах байна. Одоо $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ байхыг тооцвол $P((A\cap B)\cap C)=P(A\cap B)P(C)=P(A)P(B)P(C)$ болж батлах зүйл батлагдав.

Үл хамаарах гурван үзэгдлийн хувьд биелэх энэ томьёог хэдэн ч үл хамаарах үзэгдлийн хувьд өргөтгөж болно. Энэхүү зүйн тогтлыг ***магадлалын үржвэрийн дүрэм*** гэнэ.

7. Зоос ба шоог зэрэг орхих туршилт зоос ба шоог дэс дараалан орхих туршилтаас юугаараа ялгаатай, юугаараа ижил вэ?

8. Гурван зоосыг зэрэг орхиход хэдэн эгэл үзэгдэл илрэх вэ? Бүгд тоогоор буух үзэгдлийн магадлалыг үржвэрийн дүрмээр олоорой.

9. Нүдний эмчийн үзлэгт 60 эрэгтэй, 65 эмэгтэй хүн оржээ. Үзлэгийн дүнг хүснэгтээр харуулав.

	Нүдний шил зүүдэг	Нүдний шил зүүдэггүй	нийт
эр	25	35	60
эм	20	45	65
нийт	45	80	

Үзлэгт орсон хүмүүсээс таамгаар нэгийг сонгоход

а. нүдний шил зүүдэг хүн таарах ба тэр нь эмэгтэй хүн байх үзэгдлийн магадлалыг,

б. эрэгтэй хүн таарах ба тэр нь нүдний шил зүүдэггүй байх магадлалыг тус тус ол.

10. Нэг шоог хоёр удаа орхиход хоёуланд нь 3-аас ихгүй нүдээр буух үзэгдлийн магадлалыг үржвэрийн дүрмээр ол.

11. Буудлагын хоёр тамирчин бай буудаж байв. Эхний тамирчны онох магадлал 0.8, хоёр дахь тамирчны онох магадлал 0.9 бол хоёр тамирчин хоёулаа онохгүй байх үзэгдлийн магадлалыг ол.

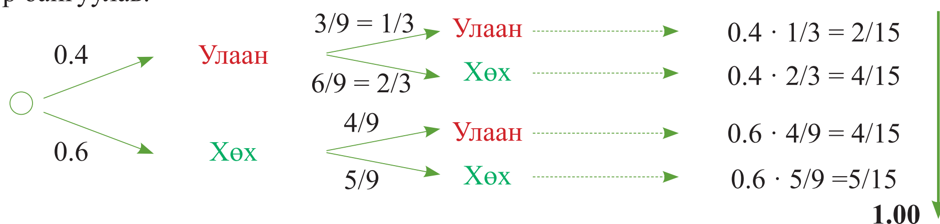
12. Хар ба цагаан шоог зэрэг орхих туршилтад хар шоо тэгш нүдтэй талсаараа, цагаан шоо 2-оос цөөнгүй нүдтэй талсаараа буух үзэгдлийн магадлалыг үр дүнгийн хүснэгт байгуулах арга болон үржвэрийн дүрмээр ол.

Нийлмэл үзэгдлийн магадлалыг хялбар тооцоолох нэг арга нь модны схем байгуулах арга юм.

Жишээ 3. Хайрцагт 4 улаан, 6 хөх бөмбөг байв. Хайрцгаас хоёр бөмбөг таамгаар авах туршилт хийхэд ижил өнгөтэй бөмбөгнүүд гарч ирэх үзэгдлийн магадлалыг ол.

Бодолт 1. Эхлээд магадлалын сонгодог тодорхойлолт ашиглан бодъё. Хайрцагт байгаа 10 бөмбөгнөөс 2-ыг сонгох боломжийн тоо $C_{10}^2 = 45$ учраас уг туршилтад ижил боломжтой 45 эгэл үзэгдэл илэрнэ. Хоёр улаан бөмбөг сонгох боломжийн тоо $C_4^2 = 6$ учраас харгалзах үзэгдлийн магадлал $P(y,y) = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$ байна. Үүнтэй ижлээр хоёр хөх бөмбөг сонгох боломжийн тоо $C_6^2 = 15$ учраас харгалзах үзэгдлийн магадлал $P(x,x) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$ болно. Хоёр улаан бөмбөг гарч ирэх, хоёр хөх бөмбөг гөрч ирэх хоёр үзэгдэл нийцгүй. Иймээс ижил өнгөтэй бөмбөг гарч ирэх үзэгдлийн магадлал $\frac{2}{15} + \frac{1}{3} = \frac{7}{15}$ байх юм.

Бодолт 2. Одоо модны схемийн аргаар бодъё. Бүх тохиолдлыг тусгасан модны схемийг доор байгуулав.



Энэхүү модны схемээс туршилтын дүнд 4 эгэл үзэгдэл илрэх бөгөөд хоёр бөмбөг хоёулаа улаан байх үзэгдлийн магадлал $\frac{2}{15}$, хоёулаа хөх байх үзэгдлийн магадлал $\frac{5}{15}$ байхыг харж болно. Эдгээр үзэгдлүүд нийцгүй учраас гарч ирсэн бөмбөгнүүд ижил өнгөтэй байх үзэгдлийн магадлал $\frac{2}{15} + \frac{5}{15} = \frac{7}{15}$ гэж гарч байгаа нь өмнөх бодолтын хариутай тохирч байна.

Модны схемээр үзэгдлийн магадлалыг тооцоолохдоо:

- Туршилтын тухайн алхамд илрэх үзэгдэл бүрээс дараагийн алхамд илрэх бүх үзэгдлийг зүүнээс баруун тийш салбарлуулж тэмдэглэнэ.
- Салбар мөчир бүрийн дээр уг үзэгдлийн магадлалыг бичнэ.
- Модны мөчрийн дагуу тэмдэглэгдсэн үзэгдлүүдийн магадлалыг үржүүлж мөчрийн төгсгөлд бичнэ.
- Туршилтад илрэх бүх эгэл үзэгдлийн магадлалын нийлбэр 1-тэй тэнцүү эсэхийг шалгана.
- Магадлалыг нь олох гэж буй үзэгдэлд харьяалагдах эгэл үзэгдлүүдийн магадлалыг нэмнэ.

13. Хайрцагт 7 улаан, 3 хөх бөмбөг байв. Хайрцгаас 2 бөмбөг зэрэг авах туршилт хайрцгаас 2 бөмбөг дараалан авах туршилтаас ялгаатай юу?

14. Нэг уутанд 2 улаан, 3 хөх бөмбөг нөгөө уутанд 4 улаан, 6 хөх бөмбөг байв. Хоёр уутнаас нэг, нэг бөмбөг авах туршилтын модны схем эхний уутнаас нэг бөмбөг авсны дараа нөгөө уутнаас нэг бөмбөг авах туршилтын модны схемээс ялгаатай юу?

15. Хайрцагт 4 улаан, 6 хөх бөмбөг байв. Хайрцгаас нэг бөмбөг таамгаар авч өнгийг нь бүртгээд буцааж хийсний дараа дахин нэг бөмбөг таамгаар авах туршилт

хийв. Ижил өнгөтэй хоёр бөмбөг гарч ирэх үзэгдлийн магадлалыг модны схем байгуулж ол.

16. Хар ба цагаан шоог зэрэг орхиход хар шоо тэгш тоотой нүдээрээ, цагаан шоо 5-аас багагүй тоотой нүдээрээ буух үзэгдлийн магадлалыг модны схем байгуулж, дараа нь үр дүнгийн хүснэгт байгуулж ол.
17. Уутанд 7 улаан, 5 шар үрлэн чихэр байв. Таамгаар хоёр чихэр гаргах туршилт хийхэд өөр өнгөтэй чихрүүд гарч ирэх үзэгдлийн магадлалыг модны схемийн арга болон жишээ 6-ийн бодолт 1-д хэрэглэсэн аргаар ол.
18. Хайрцагт 2 улаан, 2 цагаан, 6 ногоон шагай байв. Хайрцгаас нэг шагай таамгаар авч өнгийг нь бүртгээд буцааж хийх туршилтыг 3 удаа хийв. Ижил өнгөтэй 3 шагай гарч ирэх үзэгдлийн магадлалыг модны схем байгуулж ол.
19. Нэг уутанд 2 улаан, 3 хөх бөмбөг нөгөө уутанд 4 улаан, 6 хөх бөмбөг байв. Нэг уут таамгаар сонгоод сонгосон уутнаасаа хоёр бөмбөг таамгаар авах туршилт хийв. Ижил өнгөтэй хоёр бөмбөг гарч ирэх болон ялгаатай өнгөтэй хоёр бөмбөг гарч ирэх үзэгдлүүдийн магадлалыг модны схем байгуулж ол.
20. Хайрцагт 7 улаан, 3 хөх бөмбөг байв. Хайрцгаас нэг бөмбөг таамгаар авч өнгийг нь бүртгээд буцааж хийлгүйгээр дахин нэг бөмбөг таамгаар авах туршилт хийв. Ядаж нэг улаан бөмбөг гарч ирэх үзэгдлийн магадлалыг модны схем байгуулж ол.

Жишээ 4. Буудлагын 3 тамирчин бай буудаж байв. Тамирчин бүрийн алдах магадлал 0.1 бол

а. гурвуулаа алдах магадлалыг,
б. яг нэг тамирчин алдах магадлалыг,
в. ядаж нэг тамирчин алдах магадлалыг модны схем байгуулахгүйгээр ол.

Бодолт. Тамирчин тус бүрийн алдаж буудах үзэгдлийг харгалзан A, B, C гээд тамирчин тус бүрийн байг онох үзэгдлүүдийг харгалзан A', B', C' гэж тэмдэглэе. Тэгвэл эсрэг үзэгдлийн магадлалын томьёо ёсоор $P(A') = P(B') = P(C') = 0.9$ болох ба

а. Гурвуулаа алдах магадлал үржвэрийн дүрмээр
$P(A \cap B \cap C) = 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.1 = 0.001$ байна.

б. Яг нэг тамирчин алдаж буудах үзэгдлийн магадлал нийлбэрийн дүрмээр
$P(A \cap B' \cap C') + P(A' \cap B \cap C') + P(A' \cap B' \cap C)$
$= (0.1 \cdot 0.9 \cdot 0.9) + (0.9 \cdot 0.1 \cdot 0.9) + (0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.1) = 0.243$ болно.

в. Ядаж нэг тамирчин онох үзэгдлийн магадлал эсрэг үзэгдлийн магадлалын томьёогоор
$P(A' \cap B' \cap C') = 1 - P(A \cap B \cap C) = 1 - 0.001 = 0.999$ болно.

21. 52 модтой хөзрөөс хоёр хөзөр дараалан сугалах туршилт хийв. Эхлээд тамга хөзөр гарч ирсэн бол дараа нь дахин тамга хөзөр гарч ирэх, хатан хөзөр гарч ирэх үзэгдлүүдийн магадлал тус тус ямар байх вэ?
22. Уутанд 5 шар, 6 цэнхэр бөмбөг байв. Таамгаар хоёр бөмбөг дараалан авах туршилт хийв. Модны схем байгуулж ядаж нэг шар бөмбөг гарч ирэх үзэгдэл ба яг нэг шар бөмбөг гарч ирэх үзэгдлүүдийн магадлалыг тус тус ол.
23. Хэрэв I машины эвдрэх магадлал 0.2 ба II машины эвдрэх магадлал 0.3 бол яг нэг машин эвдрэх ба ядаж нэг машин эвдрэх магадлалыг модны схем байгуулахгүйгээр ол.

24. Ширээн дээр М, Э, Д, Л, Э, Г гэсэн үсгүүдийг нэг нэгээр нь бичсэн 6 карт байв. Таамгаар 2 карт авахад хоёр Э үсэг таарах магадлалыг, ядаж нэг Э үсэг таарах магадлалыг, яг нэг Э үсэг таарах магадлалыг тус тус ол.

	хатуу	зөөлөн
I	12	5
II	7	5
III	6	8
IV	3	9

25. Адьяад 4 номын тавиур байдаг. Ном бүр эсвэл хатуу хавтастай эсвэл зөөлөн хавтастай. Тавиур бүр дээрх номын тоог хүснэгтээр үзүүлэв. Адьяа нэг ном таамгаар авахад.

а. хатуу хавтастай ном таарах үзэгдлийн магадлалыг,

б. тэгш дугаартай тавиураас авсан ном зөөлөн хавтастай байх үзэгдлийн магадлалыг тус тус ол.

26. Мөнхгэрэлийн сургууль руугаа явах замд дараалсан гурван гэрлэн дохио тааралддаг. Эдгээр гэрлэн дохио тус бүрд зогсож саатах магадлал харгалзан 0.4, 0.5, 0.2 байсан бол Мөнхгэрэл

а. ядаж нэг гэрлэн дохио дээр зогсох үзэгдлийн магадлалыг,

б. яг нэг гэрлэн дохио дээр зогсох үзэгдлийн магадлалыг,

в. яг хоёр гэрлэн дохио дээр зогсох үзэгдлийн магадлалыг,

г. аль ч гэрлэн дохио дээр зогсохгүй байх үзэгдлийн магадлалыг тус тус ол.

27. Нэгдүгээр хайрцагт 6 шар, 4 ногоон шагай, хоёрдугаар хайрцагт 5 шар, 5 ногоон шагай, гуравдугаар хайрцагт 3 шар, 7 ногоон шагай байв. Таамгаар нэг хайрцаг сонгож тэр хайрцгаасаа 2 шагай таамгаар авах туршилт хийв.

а. Хоёр ижил өнгийн шагай гарч ирэх үзэгдлийн магадлалыг ол.

б. Ядаж нэг ногоон өнгөтэй шагай гарч ирэх үзэгдлийн магадлалыг ол.

28. Дараах магадлалуудыг ол.

а. Шоог хоёр удаа орхих туршилтад яг нэг удаа 6 гэсэн нүдээр буух үзэгдлийн магадлалыг ол.

б. Шоог гурван удаа орхих туршилтад ядаж нэг удаа 6 гэсэн нүдээр буух үзэгдлийн магадлалыг ол.

29. Наран асуулт бүр нь дөрвөн сонголттой гурван асуултын хариуг таамгаар сонгожээ.

а. Гурван асуултад зөв хариулах магадлалыг,

б. яг хоёр асуултад зөв хариулах магадлалыг,

в. ядаж нэг асуултад зөв хариулах магадлалыг,

г. хоёроос цөөнгүй асуултад зөв хариулах магадлалыг тус тус ол.

30. Нэг хайрцагт 5 улаан, 5 хөх харандаа, нөгөө хайрцагт 2 улаан, 2 хөх харандаа байв. Эхний хайрцгаас нэг харандаа авч хоёрдугаар хайрцагт хийгээд тэр хайрцгаасаа хоёр харандаа таамгаар авах туршилт хийв.

а. Улаан өнгөтэй хоёр харандаа гарч ирэх үзэгдлийн магадлалыг,

б. ядаж нэг улаан өнгөтэй харандаа гарч ирэх үзэгдлийн магадлалыг,

в. өөр өнгөтэй хоёр харандаа гарч ирэх үзэгдлийн магадлалыг тус тус ол.

XV БҮЛЭГ. ХЭМЖИГДЭХҮҮН

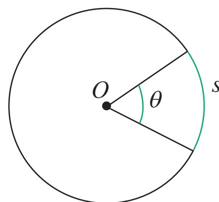
Энэ бүлэг сэдвийг судалснаар дараах мэдлэг, чадварыг эзэмшинэ.

- *Тойргийн нумын урт болон дугуйн сектор, сегментийн талбай олох томьёо гаргах, томьёо хэрэглэн бодлого бодох*
- *Пирамид, цилиндр, призм, бөмбөрцөг, конусын гадаргуугийн талбай, эзлэхүүнийг олох томьёог мэдэх, хэрэглэх*
- *Пирамид, цилиндр, призм, бөмбөрцөг, конусын хавтгай огтлол байгуулах, огтлолын талбайг тооцоолох*
  - *Диагональ огтлол*
  - *Тэнхлэг огтлол*
  - *Суурьтай параллел огтлол*

15.1. ТОЙРГИЙН НУМЫН УРТ, ДУГУЙН СЕКТОР, СЕГМЕНТИЙН ТАЛБАЙ

Зурагт дүрслэгдсэн s нумын уртыг хэрхэн олох талаар авч үзье.

Тодорхойлолт. Орой нь тойргийн төв дээр орших, талууд нь тойргийг огтолсон өнцгийг **төв өнцөг** гэнэ. Төв өнцөг дотор орших тойргийн хэсгийг уг өнцгийн **тулсан нум** гэнэ. Тойргийг 360 тэнцүү хэсэгт хуваасны нэг хэсэгт харгалзах төв өнцгийг өнцөг хэмжих нэгж болгон авч нэг градус хэмжээтэй өнцөг гэдэг. Нумыг түүнд тулсан төв өнцгөөр хэмжинэ.

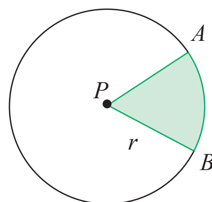


$\angle O$ нь төв өнцөг, тулсан нум нь s.

Тойргийн урт нь $2\pi r$-тэй тэнцүү байдаг. Иймд $1°$-ын өнцөгт харгалзах нумын урт $\frac{2\pi r}{360}$ учир θ-г градусаар хэмжсэн тохиолдолд s нумын урт $\frac{\pi r}{180} \cdot \frac{\theta}{1°}$ болно.

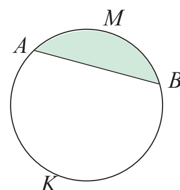
APB секторын талбайг хэрхэн олох талаар авч үзье.

Тодорхойлолт. Төв өнцөг дотор орших дугуйн хэсгийг **сектор** гэнэ.



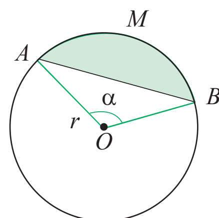
$1°$ хэмжээтэй төв өнцөгт харгалзах секторын талбай дугуйн талбайн $\frac{1}{360}$ буюу $\frac{\pi r^2}{360}$ - тай тэнцүү. Иймд θ хэмжээтэй төв өнцөгт харгалзах секторын талбай $\frac{\pi r^2}{360} \cdot \frac{\theta}{1°}$ болно.

Жишээ 1. Хэрэв $r = 3$ радиустай дугуйн α өнцөгт харгалзах секторын талбай $S_{сек} = 2\pi$ бол α өнцгийг ол.



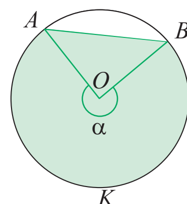
Бодолт. Өгсөн радиусыг секторын талбай олох томьёонд орлуулж, α-г олно. Иймд $2\pi = \dfrac{\pi \cdot 3^2 \cdot \alpha}{360^\circ}$ учраас α = 80° болно.

Тодорхойлолт. Хөвч нумаар хязгаарлагдсан дугуйн хэсгийг **сегмент** гэнэ.



AB хөвч тойргийг *AMB, AKB* гэсэн хоёр сегментэд хуваана. α градусын төв өнцөгт харгалзах секторын талбай $S_{сек} = \dfrac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ}$ байдаг. $\alpha < 180^\circ$ байхад *AMB* сегментийн талбайг олохдоо α өнцөгт харгалзах *AOB* секторын талбайгаас *AOB* гурвалжны талбайг хасна. Өөрөөр хэлбэл

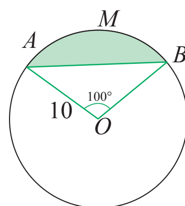
$S_{сег} = S_{сек} - S_{\triangle AOB} = \dfrac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ} - S_{\triangle AOB}$ болно.



Харин $\alpha > 180^\circ$ байхад *AKB* сегментийн талбайг олохдоо α өнцөгт харгалзах *AOB* секторын талбай дээр *AOB* гурвалжны талбайг нэмж олно. Өөрөөр хэлбэл $S_{сег} = S_{сек} + S_{\triangle AOB} = \dfrac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ} + S_{\triangle AOB}$ болно. Үүнээс дараах дүгнэлтийг хийнэ.

$$S_{сег} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ} \pm S_{\triangle AOB}$$

Энд α нь сегментийн нумыг агуулсан төв өнцгийн градусан хэмжээ, $S_{\triangle AOB}$ нь дугуйн төв болон харгалзах секторын хоёр радиусын төгсгөлд оройтой гурвалжны талбай.



Жишээ 2. 10 см радиустай, $\alpha = 100^\circ$ төв өнцөгт харгалзах сегментийн талбайг ол.

Бодолт. *AMB* сегментийн талбайг *AOB* секторын талбайгаас *AOB* гурвалжны талбайг хасаж олно. Өөрөөр хэлбэл $S_{сег} = S_{сек} - S_{\triangle AOB}$

а. *AOB* секторын радиус, төв өнцөг өгсөн учраас

$$S_{секAOB} = \frac{\pi 10^2}{360^\circ} \cdot 100^\circ = \frac{5}{18} \cdot 100\pi = \frac{250}{9}\pi \approx 27.7 \cdot 3.14 = 87.2 \text{ см}^2$$

б. *AOB* гурвалжны хоёр тал хоорондох өнцөг өгсөн. ($\sin 100^\circ \approx 0.98$) Гурвалжны талбай олох томьёогоор

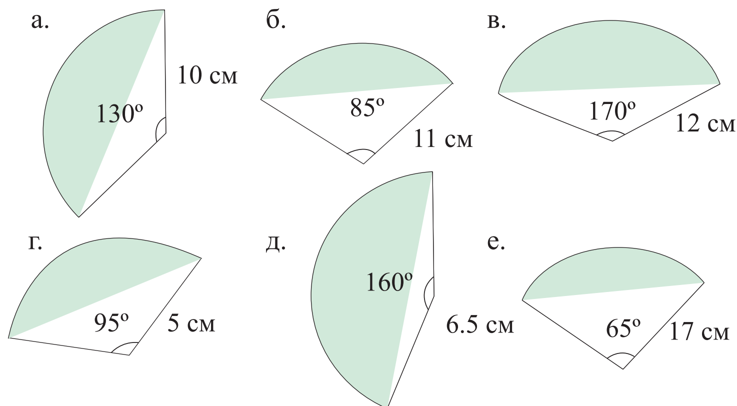
$$S_{\triangle AOB} = \frac{10 \cdot 10 \cdot \sin 100^\circ}{2} = 50 \cdot \sin 100^\circ \approx 50 \cdot 0.98 = 49 \text{ см}^2$$

в. $S_{сег} = S_{сек} - S_{\triangle AOB} = \dfrac{250}{9}\pi - 50 \cdot \sin 100^\circ \approx 87.2 - 49 = 38.2$ см² болно.

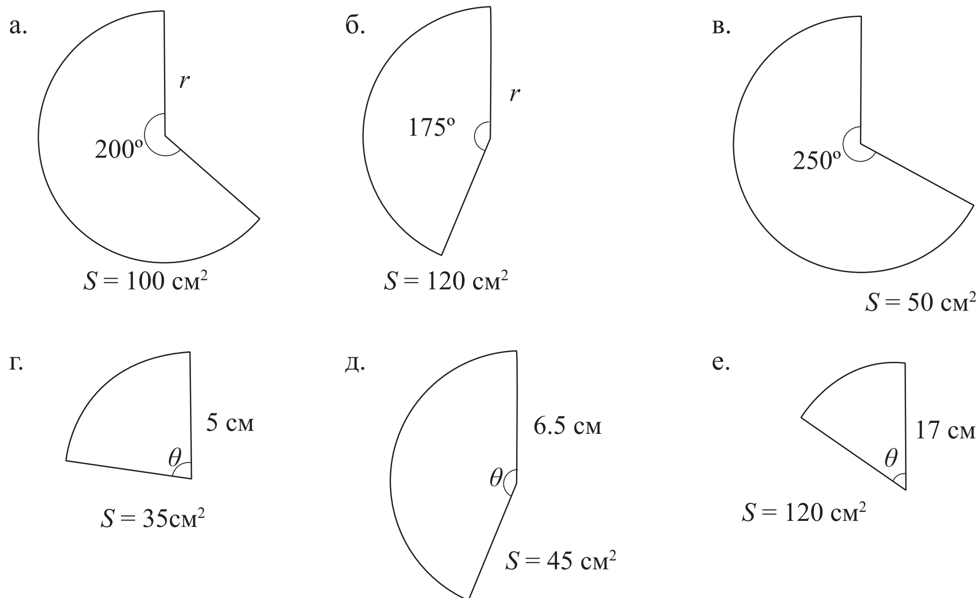
1. 55° өнцөгтэй, 15 см радиустай *OAB* сектор өгчээ. Секторын талбайг тооцоолж

ойролцоогоор 108 см^2 гэж харуул. Хариуг 3 орноор нарийвчил.

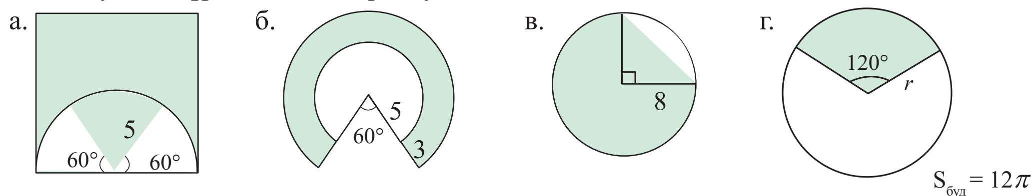
2. Дараах сектор болон сегментийн талбайг ол.



3. Доорх секторын радиус, өнцгийг ол.



4. Будсан дүрсийн талбай радиусыг ол.

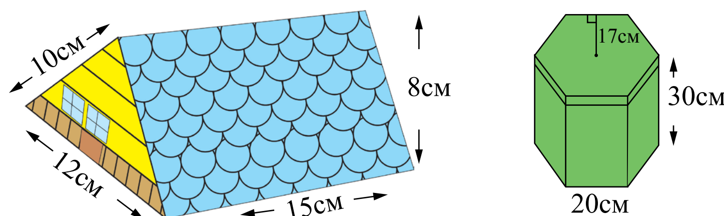


5. Экваторын уртын 40 саяны нэг нь 1 метр байдгийг үндэслэж, дэлхийн бөмбөрцгийн радиусыг ол.
6. Хэрэв дэлхийн бөмбөрцгийн радиус 1см ихэсвэл дэлхийн экватор хэчнээнээр уртсах вэ?
7. 1.4 м диаметртэй дамар минутад 80 эргэнэ. Дамрын тойрог дээрх цэгийн хурдыг ол.
8. Дэлхийн радиус 6370 км бол дэлхийн гадаргуу дээрх хоорондоо 1км зайтай хоёр цэгт татсан дэлхийн радиус хоорондоо ямар өнцөг үүсгэх вэ?
9. Хэрэв нумын градусан хэмжээ 60°, 90°, 120° бол нумын өгсөн l уртаар түүний хөвчийг ол.
10. $a\sqrt{3}$ суурьтай, $\frac{a}{2}$ өндөртэй сегментийн талбайг ол.

15.2. БИЕТИЙН ГАДАРГУУГИЙН ТАЛБАЙ БА ЭЗЛЭХҮҮН

Бид өмнөх ангид параллелепипед, призм, цилиндрийн гадаргуугийн талбай, эзлэхүүнийг олж чаддаг болсон. Одоо пирамид, конус, бөмбөлгийн талбай, эзлэхүүнийг хэрхэн олох талаар авч үзье.

Бодлого. Дараах биетүүдийн дэлгээсийг зурж, дэлгээс нь ямар дүрсээс бүрдэж байгааг ярилц, гадаргуугийн талбайг тооцоол.



Бодолт. 1 дүгээр биетийн хажуу гадаргуу нь хоёр тэгш өнцөгт, хоёр гурвалжнаас, суурь нь нэг тэгш өнцөгтөөс бүрдэнэ. Суурийн тэгш өнцөгтийн талууд 15 м, 12 м тул $S_{суурь.т.ө} = 15 \cdot 12 = 180$ м², дээврийн тэгш өнцөгтийн талууд 15 м, 10 м учраас $S_{дээврийн.т.ө} = 15 \cdot 10 = 150$ м², Гурвалжны суурь 12 м, өндөр 8 м,

$$S_{гурвалжин} = \frac{12 \cdot 8}{2} = 48 \text{ м}^2, S_{х.г} = S_{хоёр.т.ө} + S_{хоёр.гурвалжин} = 2 \cdot 150 + 2 \cdot 48 = 300 + 96 = 396 \text{ м}^2$$

$S_{г.г} = 180 + 396 = 576$ м² байна.

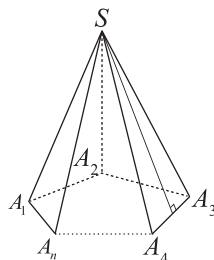
2 дугаар биетийн хажуу гадаргуу нь зургаан тэгш өнцөгт, суурь нь хоёр зөв зургаан өнцөгтөөс бүрдэнэ.

$$S_{х.г} = 6 \cdot 20 \cdot 30 = 3600 \text{см}^2, S_с = 2 \cdot 6 \cdot \frac{20 \cdot 17}{2} = 2040 \text{ см}^2, S_{г.г} = 3600 + 2040 = 5640 \text{ см}^2 \text{ болно.}$$

Тодорхойлолт. Пирамидын бүх талсын талбайн нийлбэрийг **гүйцэд гадаргуугийн талбай**, бүх хажуу талсын талбайн нийлбэрийг **хажуу гадаргуугийн талбай** гэдэг. Гүйцэд гадаргуугийн талбайг олохдоо хажуу гадаргуугийн талбай дээр суурийн талбайг нэмнэ. $S_{г.г} = S_{х.г} + S_с$ Хэрэв пирамидын суурь нь зөв олон өнцөгт бөгөөд өндөр нь суурийн төв дээр бууж байвал түүнийг **зөв пирамид** гэнэ. Пирамидын хажуу талсын өндрийг **апофем** гэнэ.

Чанар 1. Зөв пирамидын хажуу гадаргуугийн талбай нь суурийн периметрийн хагасыг апофемын уртаар үржүүлсэнтэй тэнцүү.

Баталгаа. Хэрэв n-өнцөгт зөв пирамидын суурийн нэг талын урт a, апофем l бол нэг хажуу талсын талбай $\frac{a \cdot l}{2}$ байна.



Хажуу талсууд тэнцүү гурвалжнууд учир n-өнцөгт зөв пирамидын хажуу гадаргуугийн талбай $S_{х.г} = n \cdot \frac{al}{2} = \frac{P}{2} l = pl$ болно. Энд суурийн периметр $P = na$, периметрийн хагас $p = \frac{na}{2}$ байна.

Жишээ 1. Байшингийн дээвэр 5 м талтай квадрат суурьтай пирамид хэлбэртэй байв. Дээврийн хажуу талсууд суурьд 45° өнцгөөр налну. 70см×140см хэмжээтэй хэдэн гөлмөн төмрөөр байшингийн дээврийг бүрэх вэ? Төмрийн 10% нь залгаасанд орно.

K

A M D O B C

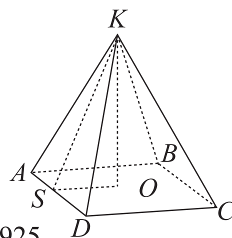
Бодолт. Энэ нь 5 м талтай квадрат суурьтай зөв пирамидын апофем нь суурийн эсрэг орших талуудын дундажтай 45° үүсгэх бол хажуу гадаргуугийн талбайг ол гэсэн бодлогод шилжинэ.

O нь квадратын диагоналиудын огтлолцлын цэг, OM нь пирамидын суурийн талын хагастай тэнцүү. Өөрөөр хэлбэл $OM = 2.5$, ΔOMK тэгш өнцөгт гурвалжны хувьд:

$\cos 45^{\circ} = \frac{OM}{KM}$ болно. Үүнээс KM буюу ADK гурвалжны өндрийг олъё $KM = \frac{2.5}{\cos 45^{\circ}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. ADK гурвалжны талбай $S_{\Delta ADK} = \frac{5 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{25\sqrt{2}}{4}$ м^2 байна. Иймд хажуу гадаргуугийн талбай нь уг гурвалжны талбайг дөрвөөр үржүүлсэнтэй тэнцүү. $S_{х.г} = 4 \cdot \frac{25\sqrt{2}}{4} = 25\sqrt{2}$м^2. Энэ нь нийт төмрийн 90% учраас залгаасанд орох төмрийг нэмж тооцоолоход $\frac{25\sqrt{2}}{90} \cdot 100 = 38.8$ болно. Үүнийг нэг төмрийн талбайд хувааж, нийт төмрийн тоог олъё. Нэг төмрийн талбай 70 см·140 см=0.7 м·1.4 м=0.98 м^2 учраас $\frac{38.8}{0.98} \approx 39.6$ буюу ойролцоогоор 40 ширхэг төмөр хэрэгтэй.

Жишээ 2. Америкийн Лас-Вегас хотод байдаг Лаксор (Luxor) зочид буудал зөв дөрвөн өнцөгт пирамид хэлбэртэй бөгөөд ханыг нь дан шилээр хийсэн байдаг. Хэрэв зочид буудлын өндөр 106.7 м, суурийн тал нь 196.9 м урттай бол буудлын ханыг хийхэд хэчнээн метр квадрат шил орсон бэ?

Бодолт. Уг бодлого зөв дөрвөн өнцөгт пирамидын өндөр 106.7 м, суурийн тал нь 196.9 м бол хажуу гадаргуугийн талбайг ол гэсэн бодлогод шилжинэ.



OS нь суурийн талын хагастай тэнцүү. $OS=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{196.9}{2}=98.45$

Хажуу талсын өндөр буюу апофемыг ΔOSK-аас олъё

$$SK^2=KO^2+OS^2=106.7^2+98.45^2=11384.89+9692.4025=21077.2925$$

$$SK\approx 145.18$$

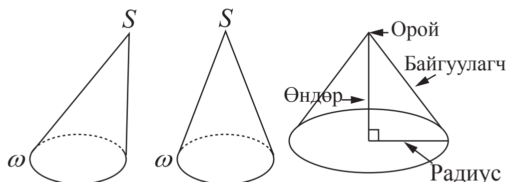
$$S_{\Delta OSK}=\frac{AD\cdot SK}{2}\approx\frac{196.9\cdot 145.18}{2}=14292.971 \text{ м}^2$$

$S_{х.г}=4\cdot S_{\Delta OSK}\approx 4\cdot 14292.971=57171.884$ м^2 шил орно.

Конусын гадаргуугийн талбай

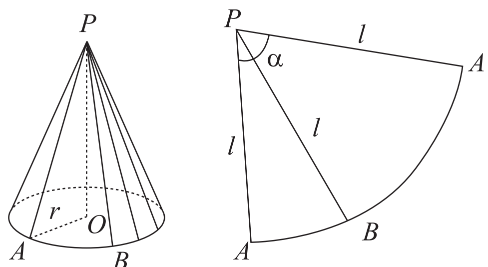
ω тойргийг агуулсан хавтгай ба хавтгайн гадна орших S цэг авч үзье.

Тодорхойлолт. S цэгийг ω тойргийн цэг тус бүртэй холбосон хэрчмүүдээр үүсэх гадаргуур **конус гадаргуу** гэнэ. Тойргийг конус гадаргуугийн **чиглүүлэгч**, татсан хэрчмийг **байгуулагч**, S цэгийг **орой** гэнэ.



Тодорхойлолт. Конус гадаргуу ба ω хилтэй дугуйгаар хязгаарлагдсан биетийг **конус** гэнэ. Конус гадаргуур конусын **хажуу гадаргуу,** дугуйг конусын **суурь** гэнэ. Конусын оройгоос суурийн хавтгайд татсан перпендикулярыг конусын **өндөр** гэнэ.

Хэрэв конусын өндрийн суурь нь конусын суурийн дугуйн төвтэй давхцаж байвал түүнийг **шулуун дугуй конус** гэнэ. Цаашид бид зөвхөн шулуун дугуй конусыг судална. Иймээс шулуун гэдэг үгийг орхиж, зөвхөн конус гэдэг нэрийг хэрэглэнэ. Иймд конусын байгуулагчид бүгд тэнцүү урттай байна. Конусын хажуу гадаргуур аль нэг байгуулагчийнх нь дагуу зүсээд, дэлгэвэл дэлгээс нь l радиустай тойргийн сектор болно.



Конусын хажуу гадаргуугийн талбай энэ секторын талбайтай тэнцүү байна.

$$S_{х.г}=S_{секAPA'}=\frac{\pi l^2}{360^\circ}\cdot\alpha$$

α-г l ба r-ээр илэрхийлье. ABA' нумын урт $2\pi r$-тэй тэнцүү. Иймд $2\pi r=\dfrac{2\pi l}{360^\circ}\cdot\alpha$ буюу

$\alpha = \dfrac{360^\circ r}{l}$ болох ба үүнийг секторын талбай олох томьёонд орлуулбал

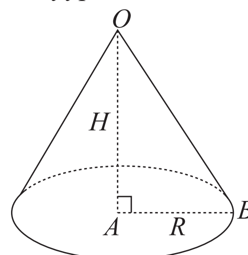
$$S_{х.г} = S_{секAPA'} = \frac{\pi l^2}{360^\circ} \cdot \alpha = \frac{\pi l^2}{360^\circ} \cdot \frac{360^\circ r}{l} = \pi rl$$

болно. Ийнхүү конусын хажуу гадаргуугийн талбай суурийн тойргийн уртын хагасыг байгуулагчаар үржүүлсэнтэй тэнцүү байна.

Тодорхойлолт. Конусын хажуу гадаргуугийн талбай ба суурийн талбайн нийлбэрийг конусын **гүйцэд гадаргуугийн талбай** гэх ба $S_{г.г}$ гэж тэмдэглэдэг.

$$S_{г.г} = S_{х.г} + S_c = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r)$$

Жишээ 3. Хэрэв конусын суурийн радиус ба өндрийн харьцаа 2:5**,** суурийн талбай нь 36π кв.н бол конусын гүйцэд гадаргуугийн талбайг ол.



Бодолт. $S_{г.г} = S_{х.г} + S_c = \pi Rl + \pi R^2$

$S_c = \pi R^2 = 36\pi, R^2 = 36, R = 6$ бодлогын нөхцөл ёсоор

$\dfrac{R}{H} = \dfrac{2}{5}, \dfrac{6}{H} = \dfrac{2}{5}, H = \dfrac{30}{2} = 15$

ΔAOB гурвалжны хувьд Пифагорын теорем бичвэл

$l = \sqrt{H^2 + R^2} = \sqrt{15^2 + 6^2} = \sqrt{225 + 36} = \sqrt{261} \approx 16.15$ болно.

$S_{г.г} = \pi \cdot \sqrt{261} \cdot 6 + \pi \cdot 6^2 \approx 3.14 \cdot 16.15 \cdot 6 + 3.14 \cdot 36 = 3.14 \cdot 132.9 = 417.3$ кв.н

Пирамидын эзлэхүүн

Бодлого. *a* талтай куб өгчээ.

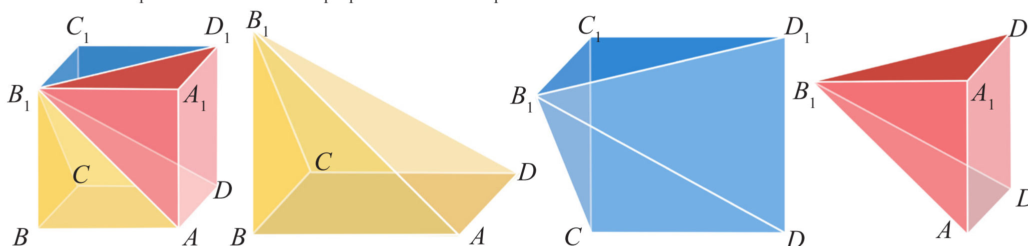
а. Кубийн B_1 оройг *A,D,C* оройтой зурагт үзүүлснээр холбож үүсэх биетийг нэрлэж, зур.

б. Үүссэн биетийн суурь нь кубийн нэг талс болж буй биетийн эзлэхүүнийг ол.

в. Гадаргуугийн талбайг нь ол.

Бодолт.

а. Кубийн B_1 оройг *A,D,C* оройтой холбоход *ABCD* суурьтай B_1оройтой, DCC_1D_1 суурьтай B_1 оройтой, ADD_1A_1 суурьтай B_1 оройтой гурван ижил пирамид үүснэ.



б. Кубийн эзлэхүүн a^3-тэй тэнцүү учраас нэг пирамидын эзлэхүүн нь кубийн эзлэхүүнийг гуравд хуваасантай тэнцүү байна.

$$V_{пирамид} = \frac{a^3}{3}$$

Эдгээр пирамидын суурь нь квадрат. Иймд суурийн талбай нь a^2-тай, өндөр a-тай тэнцүү болно.

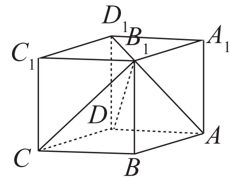
$$V_{пирамид}=\frac{a^3}{3}=\frac{a^2\cdot a}{3}$$

Чанар 2. Пирамидын эзлэхүүн түүний суурийн талбайг өндрөөр үржүүлсэн үржвэрийн гуравны нэгтэй тэнцүү.

$$V=\frac{SH}{3}$$

в. Пирамидын суурь нь квадрат, хажуу гадаргуу нь $\triangle AB_1B$ ба $\triangle DB_1C$ гэсэн хоёр тэнцүү тэгш өнцөгт гурвалжин, $\triangle AB_1B$ ба $\triangle DB_1C$ гэсэн хоёр тэнцүү гурвалжнаас бүрдэнэ. $\triangle AB_1B$ ба $\triangle DB_1C$ гэсэн тэгш өнцөгт гурвалжны талбайг олбол

$S_{\triangle AB_1B}=S_{\triangle DB_1C}=\frac{AB\cdot B_1B}{2}=\frac{a\cdot a}{2}=\frac{a^2}{2}$ гэж гарна.



$\triangle AB_1D$ гурвалжны хувьд AB_1 нь кубийн хажуу талсын диагональ, AD нь кубийн тал, DB_1 кубийн диагональ байна. Эдгээр талыг олбол $AB_1=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$, $DB_1=\sqrt{a^2+a^2+a^2}=a\sqrt{3}$ болно. Кубийн хажуу талсын диагональ AB_1 нь AD талд перпендикуляр. Учир нь AD нь ABB_1A_1 талсад перпендикуляр тул түүн дээр орших AB_1 хэрчимд перпендикуляр. Иймд $\angle DAB_1=90°$. Эндээс

$S_{\triangle AB_1D}=\frac{AB_1\cdot AD}{2}=\frac{a\sqrt{2}\cdot a}{2}=\frac{\sqrt{2}a^2}{2}$ байна. Үүнтэй адилаар DB_1C гурвалжны $\angle DCB_1=90°$

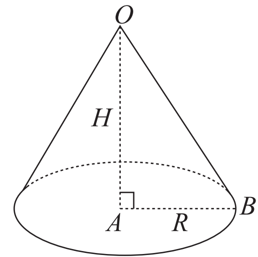
тул $S_{\triangle DB_1C}=\frac{CB_1\cdot DC}{2}=\frac{a\sqrt{2}\cdot a}{2}=\frac{\sqrt{2}a^2}{2}$. Иймд $S_{\triangle AB_1D}=S_{\triangle DB_1C}$ болно.

$$S_{х.г}=2\cdot S_{\triangle AB_1B}+2\cdot S_{\triangle AB_1D}=2\cdot\frac{a^2}{2}+2\cdot\frac{\sqrt{2}a^2}{2}=a^2+\sqrt{2}a^2=a^2(1+\sqrt{2})$$

$S_с=a^2$, $S_{г.г}=S_{х.г}+S_с=a^2\left(1+\sqrt{2}\right)+a^2=a^2\left(2+\sqrt{2}\right)$ болно.

Конусын эзлэхүүн

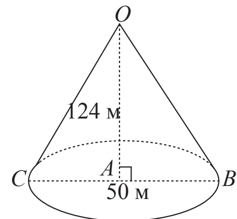
Чанар 3. R суурийн радиустай, H өндөртэй конусын эзлэхүүнийг $V=\frac{1}{3}\pi R^2H=\frac{SH}{3}$ томьёогоор олно. Өөрөөр хэлбэл конусын эзлэхүүн түүний суурийн талбайг өндрөөр үржүүлсэн үржвэрийн гуравны нэгтэй тэнцүү байна.



Жишээ 4. Хэрэв конусын өндөр нь 124 м, суурийн диаметр нь 50 м бол конусын эзлэхүүнийг ол.

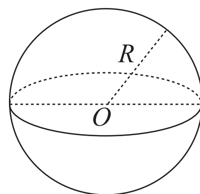
Бодолт. Суурийн дугуйн радиус диаметрийн хагастай тэнцүү учраас $R=\frac{D}{2}=\frac{50}{2}=25$ м болно.

$V=\frac{1}{3}\pi R^2h=\frac{1}{3}\pi\cdot 25^2\cdot 124=\frac{3.14\cdot 625\cdot 124}{3}\approx 81116.7$ м^3 байна.



Бөмбөрцгийн эзлэхүүн

Өгсөн O цэгээс, өгсөн R зайд орших огторгуйн цэгийн олонлогийг **бөмбөлөг** гэж нэрлэдэг**.** Өгсөн цэгийг бөмбөлгийн төв, өгсөн зайг бөмбөлгийн **радиус** гэдэг. Өөрөөр хэлбэл бөмбөлгийн төвийг бөмбөлгийн цэгтэй холбосон хэрчмийг бөмбөлгийн радиус гэнэ. Бөмбөлгийн төвийг дайрсан ба бөмбөлөг дээр төгсгөлтэй хэрчмийг бөмбөлгийн **диаметр** гэнэ. Бөмбөлгөөр заагласан биетийг **бөмбөрцөг** гэнэ.



Чанар 4. R радиустай бөмбөрцгийн эзлэхүүн $\frac{4}{3}\pi R^3$-тэй тэнцүү.

Жишээ 5. Хэрэв бөмбөрцгийн радиус 3 см бол эзлэхүүнийг ол.

Бодолт. Бөмбөрцгийн радиус өгсөн учраас эзлэхүүн олох томьёонд орлуулахад $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 3^3 \approx 4\cdot 3.14\cdot 9 = 113.04$ см³ болно.

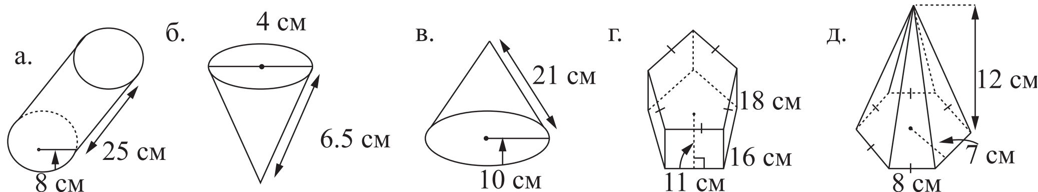
Бөмбөрцгийн гадаргуугийн талбай

Чанар 5. R радиустай бөмбөрцгийн гадаргуугийн талбайг $S = 4\pi R^2$ томьёогоор олно.

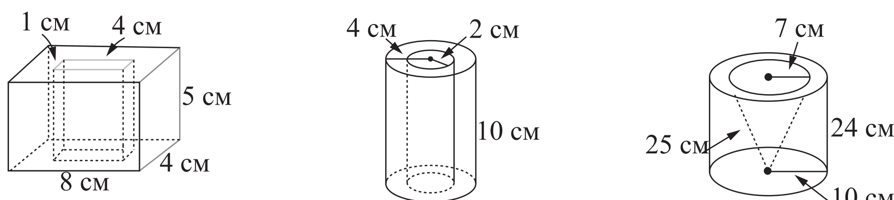
Жишээ 6. Хэрэв бөмбөлгийн гадаргуугийн талбай 64π куб.н бол эзлэхүүнийг ол.
Бодолт. Бөмбөлгийн гадаргуугийн талбай олох томьёонд орлуулахад $4\pi r^2 = 64\pi$ болох бөгөөд тэнцүүгийн тэмдгийн хоёр талыг 4π-д хуваая. $r^2 = 16, r = 4$ учир эзлэхүүн олох томьёонд орлуулахад $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 4^3 = 1.33\cdot 3.14\cdot 4^3 \approx 267.27$ *куб.н* байна.

11. Зөв пирамидын суурь 2.5 см талтай зөв зургаан өнцөгт байв. Хажуу талс нь 2.5 см суурь, 9.5 см өндөртэй адил хажуут гурвалжин байв. Пирамидын гүйцэд гадаргуугийн талбайг ол.

12. Дараах биетийн гадаргуугийн талбай болон эзлэхүүнийг ол.



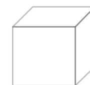
13. Биет бүрийн гадаргуугийн талбай, эзлэхүүнийг ол.



14. Хэрэв конусын радиус нь 3 см, өндөр нь радиусаасаа 2 см-ээр илүү бол конусын эзлэхүүн ба хажуу гадаргуугийн талбайг ол.
15. 3 см,4 см,5 см ирмэгтэй гурван гуулин кубийг хайлуулан нэг куб болгон цутгажээ. Энэ кубийн ирмэгийн уртыг ол.
16. Хэрэв кубийн ирмэг бүрийг 2 см-ээр ихэсгэвэл эзлэхүүн нь 98 $см^3$-ээр ихэснэ. Кубийн ирмэгийн уртыг ол.
17. Хэрэв кубийн ирмэг бүрийг 1 м-ээр ихэсгэвэл эзлэхүүн нь 125 дахин ихэснэ. Кубийн ирмэгийн уртыг ол.
18. 10 $м^3$ багтаамжтай тэгш өнцөгт параллелепипед хэлбэртэй усны савыг түүний ёроол болох 2.5м×1.75м хэлбэртэй талбай дээр байрлуулах хэрэгтэй болжээ. Савны өндрийг ол.
19. Тэгш өнцөгт параллелепипед хэлбэртэй жижиг модны хэмжээс 3 см, 4 см, 5 см. Хэрвээ ирмэг тус бүрийг нь x см-ээр ихэсгэвэл гадаргуугийн талбай нь 54 $см^2$-аар ихэснэ. Эзлэхүүн нь ямар хэмжээгээр ихсэх вэ?
20. Шулуун параллелепипедийн суурийн тал a ба b-тэй тэнцүү бөгөөд хоорондоо 30°-ын өнцөг үүсгэнэ. Хэрэв хажуу гадаргуугийн талбай нь Q-тэй тэнцүү бол эзлэхүүнийг ол.
21. Суурийн тал a ба хажуу ирмэг b-ээр а. зөв гурвалжин б. квадрат в. зөв зургаан өнцөгт суурьтай призмийн эзлэхүүнийг ол.
22. Зөв гурвалжин призмийн суурийн тал нь a, хажуу гадаргуугийн талбай нь суурийдын талбайн нийлбэртэй хэм чацуу бол эзлэхүүнийг ол.
23. Зөв гурвалжин призмийн өндөр нь суурийн их өндөртэй тэнцүү, суурийн талууд 4 см, 5 см, 7 см бол эзлэхүүнийг ол.
24. Суурийн тал a ба хажуу ирмэг b-ээр а. зөв гурвалжин б. квадрат в. зөв зургаан өнцөгт суурьтай пирамидын эзлэхүүнийг ол.
25. Хэрэв R радиустай бөмбөрцгийн эзлэхүүн, r радиустай бөмбөрцгийн эзлэхүүнээс хоёр дахин их бол R ба r - ийн хоорондын хамаарлыг илэрхийлсэн тэгшитгэлийг бич.
26. 15 см диаметртэй цилиндр саванд байгаа усанд 2 см диаметртэй металл бөмбөрцөг хийхэд усны түвшин 30 см болов. Цилиндр дэх усны эзлэхүүнийг ол.
27. Адил талт цилиндр хэлбэрийн модноос хамгийн том бөмбөрцөг гарган авахад хэдэн хувийн үлдэгдэл мод гарах вэ?
28. Хэрэв конусын гүйцэд гадаргуугийн талбай $45\pi см^2$, хажуу гадаргуугийн хавтгай дээрх дэлгээс 30° өнцөгтэй сектор бол конусын эзлэхүүнийг ол.
29. Хэрэв бөмбөрцгийн эзлэхүүн тэнхлэг огтлол нь a талтай квадрат байх цилиндрийн эзлэхүүнтэй тэнцүү бол бөмбөрцгийн радиусыг ол.
30. Гадаад шүргэлттэй хоёр бөмбөрцгийн төвүүдийн хоорондох зай 24 см ба тэдгээрийн гадаргуугийн талбайн ялгавар 192π $см^2$ бол радиусуудыг олоорой.
31. Дэлхийн гадаргуугийн $\frac{3}{4}$ нь усаар бүрхэгдсэн байдаг. Дэлхийн гадаргуугийн хэчнээн $км^2$ нь усаар бүрхэгдсэн бэ? (Дэлхийн радиусыг 6375 км гэж үз)

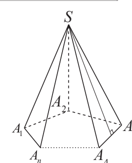
15.3. ПИРАМИД, ЦИЛИНДР, ПРИЗМ, БӨМБӨРЦӨГ, КОНУСЫН ХАВТГАЙ ОГТЛОЛ

Та нарын бага ангиасаа мэдэх болсон куб, тэгш өнцөгт параллелепипед, пирамид, призм нь хялбар олон талстын жишээ юм. Эдгээрийг сэргээн санаяа.

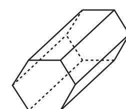


Куб. Гадаргуу нь зургаан талстай ба тэдгээр нь тэнцүү квадратууд байх олон талстыг куб гэдэг. Куб нь 8 оройтой, 12 ирмэгтэй.

Тэгш өнцөгт параллелепипед. Гадаргуу нь зургаан талстай ба тэдгээр нь тэгш өнцөгт байх олон талстыг тэгш өнцөгт параллелепипед гэнэ. Тэгш өнцөгт параллелепипед нь 8 оройтой, 12 ирмэгтэй.

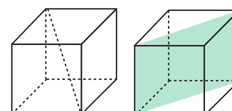


Пирамид. Суурь гэж нэрлэгдэх нэг талс нь ямар нэг n-олон өнцөгт бусад талс нь ерөнхий оройтой гурвалжнууд байх олон талстыг n-өнцөгт пирамид гэнэ. n олон өнцөгтийг пирамидын суурь, пирамидын оройгоос суурьд буулгасан перпендикулярыг **өндөр**, пирамидын оройг суурийн оройтой холбосон хэрчмийг пирамидын **хажуу ирмэг** гэнэ.

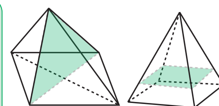


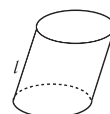
Призм. Суурь гэж нэрлэгдэх хоёр талс нь хоорондоо параллель бөгөөд тэнцүү олон өнцөгт байх, бусад талс нь параллелограмм байх олон талстыг **призм** гэдэг. Сууриудын хоорондох хамгийн богино зайг призмийн **өндөр** гэнэ. Олон талстыг хавтгайгаар огтлоход үүсэх олон өнцөгтийг **олон талстын огтлол** гэнэ.

Тодорхойлолт. Призмийн нэг талсад харьяалагдахгүй хоёр оройг холбосон хэрчмийг призмийн **диагональ**, диагональ ба хажуу ирмэгийг дайрсан хавтгайгаар призмийг огтлоход үүсэх олон өнцөгтийг **диагональ огтлол** гэнэ.



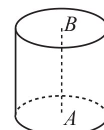
Тодорхойлолт. Пирамидын нэг талс дээр оршихгүй хоёр хажуу ирмэгийг дайрсан огтлолыг **диагональ огтлол** гэнэ. Суурьтай нь параллель хавтгайгаар огтолсон огтлолыг **суурьтай параллель огтлол** гэдэг.



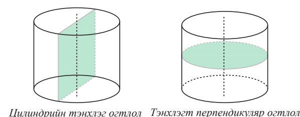


Цилиндр. Нэг хавтгай дээр оршихгүй тойрог, шулуун хоёр өгчээ. Тойргийн цэг нэг бүрийг дайруулан өгсөн шулуунтай параллель шулуун татахад үүсэх дүрсийг **цилиндр гадаргуу** гэнэ. Тойргийг цилиндр гадаргуугийн чиглүүлэгч, татсан шулууныг байгуулагч гэнэ. Цилиндр гадаргууг огтолсон параллель хоёр хавтгайгаар хязгаарлагдсан биетийг **цилиндр** гэнэ. Хэрэв эдгээр хавтгай нь байгуулагчид перпендикуляр бол шулуун цилиндр гэдэг. Бид зөвхөн шулуун цилиндрийг авч үзнэ.

Тодорхойлолт. Цилиндрийг огтолсон параллель хоёр хавтгай дээр орших дугуйг цилиндрийн **суурь**, суурийн тойргуудыг холбосон цилиндрийн гадаргуугийн хэсгийг **хажуу гадаргуу** гэнэ. Сууриудын хоорондох хамгийн богино зайг цилиндрийн **өндөр**, сууриудын төвийг дайрсан шулууныг цилиндрийн **тэнхлэг** гэнэ.



Цилиндрийг тэнхлэгийг дайрсан хавтгайгаар огтлоход тэгш өнцөгт үүсэх ба энэ огтлолыг цилиндрийн **тэнхлэг огтлол** гэнэ. Цилиндрийн тэнхлэгт перпендикуляр огтлол нь сууриудтай тэнцүү дугуй байна.


Цилиндрийн тэнхлэг огтлол Тэнхлэгт перпендикуляр огтлол

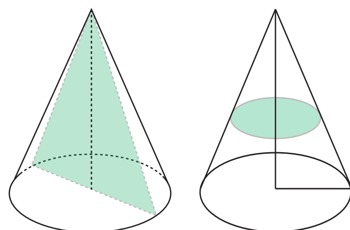
Жишээ 1. Цилиндрийг тэнхлэгээс нь 9 см зайтай бөгөөд тэнхлэгтэй параллел хавтгайгаар огтлоход 240 $см^2$ талбайтай тэгш өнцөгт үүснэ. Хэрэв цилиндрийн өндөр 10 см бол түүний суурийн радиусыг ол.

Бодолт. Бодлогын нөхцөл ёсоор $OE = 9$ см. Огтлол нь тэгш өнцөгт учраас $BC = AD, AB = DC, AB \cdot BC = 240$ ба эндээс $10 \cdot BC = 240$ буюу $BC = 24$ болно. Мөн

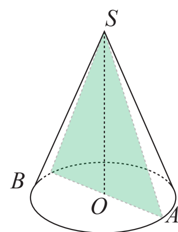
$AE = ED = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12$ болох ба AEO гурвалжны хувьд Пифагорын теорем хэрэглэвэл $OA = r = \sqrt{AE^2 + OE^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{225} = 15$ см байна.

Конус.

Тодорхойлолт. Конусын оройгоос суурийн орших хавтгайд татсан перпендикулярыг **конусын өндөр**, өндрийг агуулсан шулууныг конусын **тэнхлэг**, тэнхлэгийг дайрсан хавтгайгаар огтлоход үүсэх огтлолыг **тэнхлэг огтлол** гэнэ.



Конусын тэнхлэг огтлолд адил хажуут гурвалжин үүснэ. Конусыг тэнхлэгт нь перпендикуляр хавтгайгаар огтлоход огтлол нь конусын тэнхлэг дээр төвтэй дугуй үүснэ.



Жишээ 2. Хэрэв конусын байгуулагч 13 см ба тэнхлэг огтлолын талбай нь 60 $см^2$ бол конусын эзлэхүүнийг ол.

Бодолт. ASB гурвалжны талбай 60, $AS = 13$ тул ASO гурвалжны хувьд Пифагорын теорем бичье.

$OA^2 + OS^2 = AS^2, OA^2 + OS^2 = 13^2$, нөгөө талаас

$S_{\Delta ABS} = \frac{AB \cdot OS}{2}, 60 = \frac{2 \cdot OA \cdot OS}{2}, OA \cdot OS = 60, OA = \frac{60}{OS}$ болно. Үүнийг

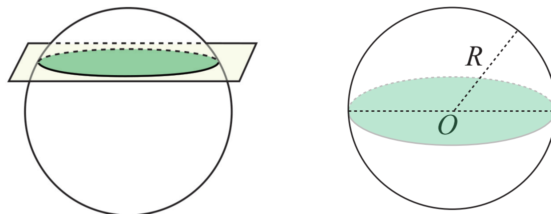
$OA^2 + OS^2 = 13^2$-д орлуулахад $\frac{3600}{OS^2} + OS^2 = 169, OS^4 - 169OS^2 + 3600 = 0$

гэсэн биквадрат тэгшитгэлд шилжих бөгөөд уг тэгшитгэлийг бодоход

$OS^2 = \frac{169 \pm \sqrt{28561 - 14400}}{2} = \frac{169 \pm 119}{2}$, $OS^2 = 144, OS^2 = 25, OS = \pm 12, OS = \pm 5$ тул $OS = 12, OS = 5$. $OS = 12$ байхад $OA = 5$ болох тул $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 5 \approx 3.14 \cdot 48 \cdot 5 = 753.6$ $см^3$ байна. $OS = 5$ байхад $OA = 12$ болох тул $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 12 \approx \frac{1}{3} \cdot 3.14 \cdot 25 \cdot 12 = 314$ $см^3$ байна.

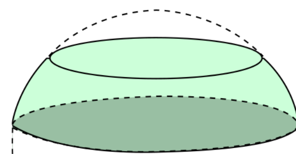
Бөмбөрцөг.

Бөмбөрцгийг хавтгайгаар огтлоход огтлолд нь дугуй үүснэ. Төвийг дайрсан огтлолыг их дугуй гэнэ.



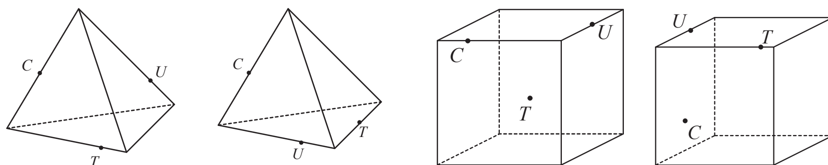
Жишээ 3. 12 см радиустай бөмбөрцгийг төвөөс нь 8 см зайд хавтгайгаар огтлоход үүсэх дүрсийн талбайг ол.

Бодолт. Бөмбөрцгийн төвийг дайрсан хавтгай болон огтлогч хавтгайнууд параллел. Бодлогын нөхцөлд өгснөөр OA=12 см, OO_1=8 см байна. $OO_1 A$ нь тэгш өнцөгт гурвалжин тул $O_1 A$ нь огтлолын дугуйн радиус болно. $O_1A = \sqrt{12^2 - 8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ см. Иймд огтлолын дугуйн талбай нь S=80π см^2



32. Параллелепипедийн диагональ огтлол ямар дүрс гарах вэ? Зур.

33. C, U, T цэгүүдийг дайрсан хавтгай огтлолыг байгуул.



34. Хэрэв тэгш өнцөгт параллелепипедийн өндөр 16 см, суурийн талууд 10 см, 12 см бол суурийн бага талыг дайрсан диагональ огтлолын талбайг ол.

35. Хэрэв параллелепипедийн суурийн талууд 17 см ба 28 см, суурийн нэг диагональ 25 см бөгөөд диагональ огтлолуудын талбайн нийлбэрийг суурийн талбайд харьцуулсан харьцаа 16:15 бол диагональ огтлолын талбайг ол.

36. Хэрэв зөв дөрвөн өнцөгт пирамидын суурийн тал нь 6 см, өндөр нь 8 см бол

а. Хажуу ирмэгийн уртыг ол. б. Апофемыг ол.

в. Хажуу гадаргуугийн талбайг ол. г. Гүйцэд гадаргуугийн талбайг ол.

д. Диагональ огтлолын талбайг ол. е. Эзлэхүүнийг ол.

37. Бөмбөрцгийн радиус 41 см, бөмбөрцгийн төвөөс 9 см зайд хавтгайгаар огтлов. Огтлолд үүсэх дүрсийн талбайг ол.

38. Бөмбөрцгийн төвийн нэг талаар хоорондоо 9 см зайтай параллель хавтгайнууд татав. Тэдгээрийн огтлолд үүсэх дугуйн талбайнууд 49 см, 4 см бол бөмбөлгийн талбайг ол.

Хариу

I БҮЛЭГ

1. 49; **2.** 40; **3.** 33; **4.** 80; **5.** а. $\varnothing$ б. $\{1\}$, в. $\{1\}$, г. $\{3, -5\}$; **7.** а. $\{x \mid x > 1, x \in \mathbb{R}\}$, б. $\{2\}$, в. $\{x \mid 0.2 < x \le 1, x \in \mathbb{R}\}$ г. $\{4\}$; **8.** $\varnothing, [-\infty, 1] \cup [3, +\infty]$; **9.** а. $A \cup B = \{a, b, c, d, f\}, B \cup C = \{a, j\}, A \cap B \cap C = \{a\}$, б. 15, в. $(a, a), (a, c), (a, d), (a, f), (b, a), (b, c), (b, d), (b, f), (f, a), (f, c), (f, d), (f, f)$; **10.** а. $]-3, 6],]-\infty, +\infty[$, б. $\varnothing, [-3, 2] \cup [3, 6]$, в. $]0, 5],]-\infty, +\infty[$, г. $[1, 4], [-2, +\infty[$; **11.** Ядаж нэг шоо 3-аас бага тоогоор буух үзэгдэлд 20 эгэл үзэгдэл харьяалагдах учраас магадлал нь $\frac{5}{9}$, нэг шоо 2-оос бага тоогоор нөгөө шоо 4-өөс их тоогоор буух үзэгдэлд харьялагдах эгэл үзэгдлүүд нь (1,5), (1,6), (5,1), (6,1) болно. **12.** а.12, б. 9, в. 3; **13.** 25 цэгээс тогтох квадрат тор үүснэ; **14.** $\varnothing$, $[1.5, 2.25]$; **15.** 9; **16.** В үнэн, бусад нь худал;

II БҮЛЭГ

1. $\frac{1}{36}$ **3.** 2 **5.** 2^{-43} **7.** $\frac{1}{2^9 \cdot 3^3}$ **9.** 81 **11.** $\frac{53}{16}$ **13.** 61 **15.** $-\frac{13}{9}$ **17.** 5 **19.** $\frac{16}{243}$ **21.** –85 **23.** 312 **25.** $702x^6$ **27.** а.–3; 3 б.–2; 2 в.шийдгүй г.4 **29.** а.3см б.4дм в.0.2м г.10мм д.5м **31.** а,в,ё,ж **33.** 6 **35.** а.3 б.3 в.–5 г.–6 д.3 е.5 ё.$3\sqrt[4]{2}$ ж.$\sqrt{\frac{3}{5}}$ з. $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ и. $\frac{9}{8}$ й.77 к. -2 **37.** а.$11\sqrt{a}$ б.$6\sqrt{2b}$ в.$3\sqrt[3]{y}$ г.$2c^2\sqrt[4]{2c}$ д.$5a\sqrt[3]{a}$ е.$3b\sqrt[4]{2b^2}$ ё.$10y\sqrt[6]{10y^2}$ *ж*.$2x\sqrt{3x}$ **39.** а.$10x^2$ б.1 в.$15\sqrt[3]{3}$ г.$300\sqrt[3]{3}$ д.$\sqrt[24]{x}$ е.$\sqrt[6]{x}$ *ё*.x *ж*.$x\sqrt{x}$ **41.** а.$2\sqrt{5} < \sqrt{45}$ б.$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ в.$5\sqrt{3} < \sqrt{76}$ г.$3\sqrt[4]{2} < \sqrt[3]{163}$ д.$2\sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{25}$ е.$2\sqrt[3]{3} < 3\sqrt[3]{0.88}$ **43.** үнэн **45.** а.$\sqrt[24]{5}$ б.$\sqrt[3]{2}$ в.$5\sqrt{5}$ г.343 д.$\frac{3}{2}$ е.$\sqrt[3]{2}$ *ё*.2 ж.3 з.$\sqrt[3]{2}$ и.$\sqrt[3]{-3}$ й.0.4^3 **47.** $15 \cdot 3^{\frac{5}{12}}$ **49.** $a^{\frac{1}{3}}$ **51.** $x^{\frac{2}{3}}$ **53.** y^{-1} **55.** $\frac{7}{3}$ **57.** $\frac{x^6}{25}$ **59.** $\frac{c^4}{16}$ **61.** $\frac{x^2}{9}$ **63.** $\frac{a^3}{8}$ **65.** $\frac{x}{4}$ **67.** $2^{\frac{10}{3}}$ **69.** 1.74 **70.** 4.75 **71.** $b^{\frac{29}{36}}$ **73.** $b^{\frac{7}{9}}$ **75.** x **77.** $a^{\frac{23}{9}}$ **79.** $a^{\frac{5}{6}}$ **81.** $-2.395 \cdot 10^3$ **83.** $7.747 \cdot 10^2$ **85.** $8.6 \cdot 10^{-3}$ **87.** $5.43835 \cdot 10^2$ **89.** $1.45 \cdot 10^{-1}$ **91.** $9.45 \cdot 10^{-5}$ **93.** $4.925 \cdot 10^3$ **95.** $2.88 \cdot 10$ **97.** б.$1.2932 \cdot 10^{-1}$ в.$1.5625 \cdot 10^4$ г.$2.25 \cdot 10^{-7}$ д.$2.9 \cdot 10^4$ е.$1.40625 \cdot 10^{-10}$ *ё*.$5.59 \cdot 10^8$ *ж*.$10.125 \cdot 10^{-13}$ **1.** 8 **2.** $\frac{1925}{16}$ **3.** $2^{-\frac{4}{3}}$ **4.** $2^{\frac{11}{10}} \cdot 3^{\frac{6}{5}} \cdot 5^{\frac{17}{15}}$ **5.** $4\sqrt[6]{2}$ **6.** $4\sqrt[6]{2}$ **7.** 0 **8.** $-4\sqrt{6} - 6$ **9.** 1 **10.** $3^{-\frac{17}{48}}$ **11.** $2^{\frac{35}{6}}$ **12.** $5^{\frac{75}{36}}$ **13.** а.$9.695 \cdot 10^6$ б.$1.77892 \cdot 10^{10}$ в. -5.535714286 г. $-5.42 \cdot 10^8$

III БҮЛЭГ

1. а.0 б. 0 в. $x^{0.5} + 2x^{1.5}$ г. $4y^{\frac{1}{2}}$ д. $b\sqrt[3]{b} + 3b\sqrt{b}$ е. $(x + y)^{\frac{7}{2}}$ **3.** а. $\frac{4(3 - \sqrt{2})}{7}$ б.$\frac{\sqrt{q} - \sqrt{p}}{p - q}$ в. $\frac{6\sqrt{a} + 30\sqrt{b}}{a - 25b}$ $\frac{-4(3\sqrt{b} + 2\sqrt{z})}{9b - 4z}$ $\frac{c - 2\sqrt{cd} + d}{c - d}$ $\sqrt{x} - \sqrt{5}$ $\sqrt{y} + \sqrt{2}$ $\frac{2a - 5\sqrt{ab} + 3b}{4a - 9b}$ $\sqrt{a} - 4$ $5n(6n - 7)$ $6y^{\frac{1}{2}}\left(2 - y^{\frac{1}{2}}\right)$ в. $2y\sqrt{x}(14 - 9y)$ г. $7mn(m^2 - 4n^2)$ **7.** а. $5a(a - 1)^2$ б. $xy(x + 3y)^2$ в. $2\sqrt{ab}(\sqrt{a} - 2\sqrt{b})(\sqrt{a} + 2\sqrt{b})$ г. $ab\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)^2$ **9.** а.$(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)$ б. $4(4\sqrt{x} - y)(4\sqrt{x} + y)$ в. $(4\sqrt{s} - 11\sqrt{t})(4\sqrt{s} + 11\sqrt{t})$ г. $\left(y^{\frac{1}{9}} - 3\right)\left(y^{\frac{1}{9}} + 3\right)$ д. $(2\sqrt{2x} - 5\sqrt{y})(2\sqrt{2x} + 5\sqrt{y})$ е. $\left(a^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}\right)\left(a^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{4}\right)$ ё. $(\sqrt{b} - 1)(\sqrt{b} + 1)$ ж. $(z^{0.4} - b^4)(z^{0.4} + b^4)$ з. $\left(c^{\frac{2}{5}} - \sqrt{2}\right)\left(c^{\frac{2}{5}} + \sqrt{2}\right)$ **11.** а. үнэн б. худал в. худал г. үнэн д. үнэн е. үнэн. **13.** $c = 1$ **15.** а. $\frac{24b}{a^3}$ б. $3acd$ в. $\frac{b^2}{8x^3y^2}$ г. $2x^2 - 4x$ д. $\frac{r + 3}{4r^2}$ е. $\frac{t}{t + 1}$ ё. $\frac{1}{(p + 2)(6p - 7)}$ ж. $\frac{a + \sqrt{10}}{a^2}$ з. $\frac{\sqrt{b} - 3}{4(\sqrt{b} + 3)}$ **17.** а. $\frac{1}{3}x(x + 2)$ б. $\frac{2}{\sqrt{x} - 4}$ **19.** а. $\frac{2}{5}ab$ б.$\frac{2k}{h^3}$ в. $\frac{2x(x + 6)}{x^2 - 4}$ **21.** а. $\frac{2}{x}$ б. $-\frac{2}{x^2}$

в. $\frac{1}{x+1}$ г. $\frac{1}{x-2}$ д. $\frac{2x+5}{(2x+9)(x-6)}$ е. $\frac{10-6x}{8x+1}$ **23.** а. $\frac{25x}{40x},\frac{6}{40x}$ б. $\frac{7y}{105a},\frac{3y^2a}{105a}$ в. $\frac{-175x}{600x^2},\frac{40}{600x^2}$

г. $\frac{-25n^7}{30m^4n^7},\frac{2m^3}{30m^4n^7}$ д. $\frac{6(x-6)}{(x-4)(x+2)(x-6)},\frac{-8(x+2)}{(x-4)(x+2)(x-6)}$ е. $\frac{x(x+1)}{(2x-1)(x-7)(x+1)},\frac{2(x-7)}{(2x-1)(x+1)(x-7)}$

ё. $\frac{5(x-2)}{(x-6)(x-2)},\frac{x-5}{(x-6)(x-2)}$ ж. $\frac{7a(a-4)}{(a+4)(a-4)},\frac{a+12}{(a+4)(a-4)}$ **25.** а. $\frac{8p-15}{6p^2}$ б. $\frac{12-a}{10a^2b}$ в. $\frac{-t-s}{st}$

г. $\frac{x^2+7x+6}{15x^2}$ д. $\frac{1}{3}$ е. $\frac{2b+20}{b(b+5)}$ **27.** а. $\frac{10-x}{3(x^2-25)}$ б. $\frac{11x+6}{(x-6)(x+6)(x+3)}$ в. $\frac{9x-7}{(9-x^2)(x+1)}$ г. $\frac{13x-x^2-3}{x(x-1)^2}$

29. а. $p=\frac{3x^2+5x+18}{3x^2}$ б. $p=\frac{4x^3+5x^2-30x+45}{2x(x-3)}$ в. $p=\frac{2(2x^2-x+25)}{(x-3)(x+5)}$

1. а. $2a$ б. $\frac{xz^2}{5}$ в. $\frac{1}{2n}$ г. $5(q-2)^{\frac{1}{12}}$ д. $(x-1)$ е. $a^{\frac{1}{2}}+2$ **2.** а. 2 б. $z-25$ в. $7y-6\sqrt{7xy}+9x$ г. $3a+5\sqrt{ab}-2b$

3. а. $-4x^2y^2(2x^2+3y^2+4x^3)$ б. $(2a-3\sqrt{y})(5a-7x)$ в. $(2x-1)\left(3a^{\frac{1}{3}}-17b\right)$ г. $(x-y)(5\sqrt{a}-6b)$

д. $x(x+y)\left(x-z^{\frac{1}{2}}\right)$ е. $(a-b)\left(x^2+\sqrt{x}-1\right)$ **4.** а. $\frac{\sqrt{2}}{20}$ б. $\frac{6}{x}$ **5.** а. b^{10} б. $\frac{16y^{12}}{xz^9}$ в. $\frac{a}{2}$ г. $\frac{-3}{2}$ д. $(x+8)^2$ е. $\left(3\sqrt{k}+5\right)^2$

ё. $\frac{7(k-4)}{2(k-2)}$ ж. $\frac{y-2}{2}$ **6.** а. $\frac{7\left(\sqrt{18}-3\right)}{9}$ б. $\frac{\sqrt{z}\left(\sqrt{q}-\sqrt{p}\right)}{z(p-q)}$ в. $\frac{12\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a-b}$ г. $\frac{3\sqrt{b}+2\sqrt{z}}{9b-4z}$ д. $\sqrt{t}-\sqrt{5}$ е. $\sqrt{b}+\sqrt{7}$

7. а. $\frac{a-4}{2(a+3)}$ б. $\frac{y-3}{2y-1}$ в. $\frac{4-\sqrt{q}}{\sqrt{q}-4}=-1$ г. $\frac{x^2+x+1}{x^3}$ д. $\frac{42-24x}{3x-5}$ е. $\frac{1}{x(1-x)}$ ё. $\frac{4x^2+17x+11}{x+4}$ ж. $\frac{2x+8}{x^2-1}$ з. $\frac{2x}{x^2-4}$

и. $\frac{3}{a-5}$ й. $\frac{k-3}{(k+1)^2}$ к. $\frac{x+17}{(3-x)(x+3)(x+1)}$ **8.** а. 1 б. $a-1$ в. $1-a$ г. -2 д. $\frac{b-c}{b+c}$ е. $\frac{x-y}{x+y}$ ё. $\frac{c-b}{c+b}$ ж. 1

9. а. үнэн б. үнэн в. үнэн г. худал д. үнэн е. худал

IV БҮЛЭГ

4. –3 **6.** а. (3,6) б. (–4,–3) **7.** а. 10 б. 5 в. 1 **8.** а. $(-4.5,4)$ б. $\left(\frac{3}{2},-1\right)$ в. $\left(-1,-\frac{1}{4}\right)$ **9.** 6 **15.** C цэг *A,B* цэгүүдийн хооронд оршино. **17.** $B(5,-2)$ **18.** $B\left(-7,-\frac{1}{4}\right)$ **19.** $P_{\Delta ABC}=30+3\sqrt{2},|AD|=\frac{\sqrt{85}}{2}$ **20**. (6,–8),(6,6) **21.** (4,–5) **23**. $\left(\frac{1}{4},-\frac{7}{4}\right),\frac{3\sqrt{2}}{2}$ **24**. $A(-10,14),B(4,-14),C(0,6)$ **26**. $\left(-\frac{1}{2},0\right),\left(\frac{19}{5},\frac{43}{5}\right),\left(\frac{79}{14},\frac{43}{14}\right)$ **27**. а. –1 б. $\frac{2}{9}$ в. –12 г. 0 д. 0 е. –1
29. а. оршино б. оршихгүй **30**. *а.* $t=4$ б. $k=-4$ **32**. а. оршино б. оршихгүй в. оршино г. оршино **33**. $a=-6$ **34.** а. $y=4x+17$ б. $y=-2x+7$ в. $3y+6x+10=0$ г. $6y=6x+5$ д. $20y=5x-12$ е. $2y+x+1=0$ **35.** а. $y+4x-5=0$ б. $2y+x+2=0$ в. $2y+x-4=0$ г. $6y+5x=0$ д. $9y-10x-13=0$ е. $3my+2nx-mn=0$ **36.** а. $m=\frac{5}{2},c=4$ б. $m=-\frac{5}{2},c=-\frac{3}{2}$ в. $m=-\frac{1}{15},c=-\frac{5}{3}$ г. $m=\frac{3}{4},c=0$ д. $m=\frac{5}{2},c=\frac{1}{12}$ е. $m=-\frac{1}{13},c=-\frac{7}{13}$ **37**. $5y+4x=0$

39. а. $x^2+y^2=16$ б. $x^2+y^2=3$ в. $x^2+y^2=12$ г. $x^2+y^2=81$ д. $x^2+y^2=49$ е. $10x^2+10y^2=1$ **40.** а. $x^2+y^2=26$ б. $x^2+y^2=52$ в. $4x^2+4y^2=1$ г. $x^2+y^2=2$ д. $x^2+y^2=49$ е. $x^2+y^2=13$ **41.** а. $r=4$ б. $r=5$ в. $r=2$ г. $r=\frac{5}{3}$ д. $r=\sqrt{10}$ е. $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$ **42**. а. $x^2+y^2=41$ б. $x^2+y^2=65$ в. $x^2+y^2=7$ **43**. $2y+x=0$

1. $S=\frac{25\sqrt{2}}{2}$ **5**. $a=\frac{5}{2}$ **6**. $A(-1,-3),B\left(\frac{16}{3},-3\right),C\left(\frac{47}{19},\frac{106}{19}\right),D\left(-\frac{220}{57},\frac{106}{19}\right)$ **7.** $y+x=4,C(7,6)$

V БҮЛЭГ

1. в, г, д **2.** а, дүр нь $\{0,3\}$; б, дүр нь $\{0,2,3\}$ в, дүр нь $\{2,3,4\}$ **3.** 64 **4.** $a=-1,-\frac{1}{2},0$ **6.** а.$-2<a<2$ б. $]-\infty,-2[\cup]2,\infty[$ **7.** $a=2,b=-1$ эсвэл $a=-2,b=1$ **8.** г **9.** в **10.**±4 **11.** $\left\{y\,|\,\frac{1}{9}<y<9\right\}$ **12.** 5 **13.** а, в худал; б, г, д үнэн **16.** а. $a<0$ тул худал. б. Худал. Дүр нь $\{y\,|\,y\le 3\}$ байна. в. Үнэн. г. Үнэн. д. Худал. $y=-x^2$ функцийн графикийг *Oy* тэнхлэгийн дагуу дээш 3 нэгжээр зөөхөд уг функцийн график гарна. **18.** a=–1,q=0 **19.** a=2 **20.** $a=-\frac{1}{2},q=6$ **22.** а. $y=2x^2+12x+18$ б. $y=-\frac{1}{2}x^2+2x-2$ в. $y=-3x^2-6x-3$ **23.** а. $\left(\frac{5}{2},0\right)$, $x=\frac{5}{2}$ б. (–3,0), x=3 в. (10,0), x=10 г. (0,0), x=0 **25.** $a=\frac{4}{9},p=-4$ **31.**а, б үнэн; в, г худал **33.** $a<0,\ b<0,\ c>0,\ abc>0$ **35.** $y=-x^2+2x+8$ **37.** $y=-x^2+4x+1$ **39.** 14 **40.** 3 **41.** $y=\frac{1}{16}x^2$**43.** 2 **48.** $a>0,\ p>0,\ q<0$ **49.** 1 **51.** $y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{13}{4}$ **53.** $x>-2.5$ **55.** 27 **57.** а

VI БҮЛЭГ

1. а.$x\in]2,\infty[$ б. $x\in]-\infty,3[$ в. $x\in]\ 4,\infty[$ г. $x\in]-\infty,2[$ д. $x\in]-13,\infty[$ е. $x\in]-\infty,\ 4[$ ё. $x\in]-\infty,\ 9[$ ж. $x\in]-\infty,\ 22[$ з. $x\in[6,\infty[$ и. $x\in]-\infty,-14]$ й. $x\in[4,\infty[$ к. $x\in[4,\infty[$ **2.** а. $x\in]-\infty,4[$ б. $x\in]-\infty,-4[$ в. $x\in]-3,\infty[$ г. $x\in\left]-\infty,-\frac{7}{3}\right[$ д. $x\in[-2,\infty[$ е. $x\in[4,\infty[$ ё. $x\in]2.5,\infty[$ ж. $x\in]-\infty,-1]$ з. $x\in]-\infty,-5]$ и. $x\in]-\infty,6[$ й. $x\in]-6,\infty[$ к. $x\in]-\infty,0.5[$ **3.** а. $x\in]-8,\infty[$ б. $x\in[3,\infty[$ в. $x\in]-17,\infty[$ г. $x\in]16,\infty[$ д. $x\in]-\infty,-2[$ е. $x\in]-\infty,7[$ **4.** а. $a\in[2,\infty[$ б. $m\in]-\infty,\infty[$ в. $x\in\left]-\infty,\frac{17}{6}\right[$ г. $x\in]-\infty,\infty[$ д. $x\in[1,\infty[$ е. $w\in]-\infty,\infty[$ ё. $x\in]-3,\infty[$ ж. $x\in\varnothing$ з. $x\in\left]-\infty,-\frac{32}{5}\right[$ и. $x\in\varnothing$ й. $x\in]-\infty,-4[$ **5.** а. $x\in[-4,1[$ б. $x\in]-16,8[$ в. $x\in\left]2,\frac{23}{3}\right]$ г. $x\in[-1.4,\ 0.8]$ д. $x\in]3,45]$ е. $x\in]2.3,\ 9.6[$ **6.** а. $x\in]3,6]$ б. $x\in\varnothing$в. $x\in\left]-\frac{1}{3},-\frac{1}{4}\right[$ г. $x\in]-\infty,-7[$ д. $x\in[-5,0]$ е. $x\in\left]\frac{2}{3},\frac{5}{4}\right]$ ё. $x\in\left]-6,\ -\frac{24}{5}\right]$ ж. $x\in[-4,0]$ **7.** а. $0,\frac{4}{3}$ б. $0,\frac{1}{6}$ в. $-10,10$ г. $0,\frac{6}{5}$ д. $0,-2$ е. $0,\ 0.5$ ё. $0,-0.7$ ж.$-\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}$ з.$-\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}$ и. $0,\frac{3}{4}$ й. $-\sqrt{3},\ \sqrt{3}$ к. $0,\frac{4}{5}$ **8.** а. $-11,2$ б. $-7,12$ в. 17 г. 4,8 д. $-11,-3$ е. $-2,1$ **9.** а.$-\frac{1}{2}$, 3 б. шийдгүй в. $0,-7.5$ г.$1,\ \frac{5}{3}$ д. $-\frac{3}{7},2$ е. $-1.5,\ 1.5$ ё. $-1,-0.8$ ж. -0.25 з. $-2.4,2.4$ и.$\frac{1}{6}$ й.$-6,0.8$ к. 0,5 **10.** а. Шийдгүй б. Давхацсан ганц шийдтэй в. Шийдгүй г. Хоёр шийдтэй д. Шийдгүй е. Хоёр шийдтэй **11.** а. $-1,23$ г. $1,\ \frac{15}{4}$ б. $2,\frac{7}{3}$ д.$\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{17}}{4},\ \frac{3}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4}$ е. 0,8 в. $-\frac{11}{3},2$ ё. шийдгүй ж. $\frac{9}{10}-\frac{3\sqrt{29}}{10},\ \frac{9}{10}+\frac{3\sqrt{29}}{10}$ з. $-18,18$ и. $-5,5$ й. $-8,8$ к. $-3,8$ **12.** а. $-2,-1,1,2$ б. $-3,3$ в. $-1,1$ г. $-2,2$ д. $-1,1$ е. шийдгүй ё. $-3,\ 3,-\sqrt{5},\ \sqrt{5}$ ж. 1 з. $-2,2$ и. $-3,-1,1,3$ й. $-3,-2,2,3$ к. Шийдгүй **13.** а.3 б. 1 в. 2 г. −5 д. −2 е. 9 ё. −3 ж. 4 **14.** 11, 12 15. 7,8 ба −8, −7 16. 32м 17. 10 м, 21 м 18. 3, 8 ба −8, −3 19. 96 см.кв 20. 6 км/ц, 8 км/ц 21. 64 дм.кв 22. 20 эгнээ 23. 21 баг 24. 400 м, 100 м **6.4** 1.а (1,3) 2.а (3,3) в. (1,3) д. (5,3) 3.а (3,3) в. (–1,3) д. (1,2) 4а. (4,–4) в. (2,1) д. (2,2) 5а. {–6, 14} в. 15 цаг д. 1600 төг, 600 төг 6а. төгсгөлгүй олон шийдтэй в. (3,–1) 7а. (0.8, –0.1) в. (1.8,1) **6.5** 11а. $y\ge\frac{1}{2}x-1$ 27.а. –2 в. 3 д. $\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$ 28.а. 2, –1 в. –1, –2. 29а. 1 в. –3. 30а. $-\frac{3}{4}$ в. – 3. 31а. –1 в. 1. Бүлгийн нэмэлт 7.252 төг.

VII БҮЛЭГ

3. $\sqrt{3}$ см **7.** 75 **8.** *AM* диаметртэй тойрог байгуулна **9.** *AM* диаметртэй тойрог байгуулна **10.** а. $6\sqrt{5}$ б. $\frac{2}{3}\sqrt{5}$ **11.** а. $\frac{\sqrt{3}}{6}a$ б. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см **13.** 156 см^2 **14.** $3\pi\left(7-4\sqrt{3}\right)см^2$ **15.** б. $\sqrt{7}$ **16.** $\frac{10}{9}$ **17.** а. 45° б. 2 **19.** 2, 6.5 **20.** $2\sqrt{13}, 3\sqrt{13}$ **21.** $\frac{3}{8}\sqrt{3}$ **24.** $\Delta AQB \sim \Delta NQD$ гурвалжнууд төсөөтэй гэдгийг ашиглана **25.** Дөрвөн өнцөгтийн гурван оройгоор үүссэн гурвалжныг багтаасан тойргийн радиусыг олно. $R=\frac{abc}{4s}=10\frac{5}{8}$ см **27.** 50° **32.** б. 35° **33.** $1:\sqrt{2}$ **34.** 1 : 2 **37.** $24\sqrt{3}$см^2 **38.** $AD=\sqrt{3}, BC=CD=\sqrt{2}$ **39.** а. $\sqrt{29}$см **40.** $3\sqrt{15}$ **41.** 5 **43.** в. $\left(4-2\sqrt{2}\right)$см **45.** в. $16\sqrt{5}+24$ **51.** 39° **52.** б. $\alpha=16°, \beta=58°$ **53.** $18\sqrt{2}$см **54.** а. 7.4 б. 11.8 **55.** а. $3\frac{1}{3}$ б. 2 **60.** 8, 12 **61.** 25,10 **62.** а. 24 б. 20 **64.** а. 15.6см^2 б. 232см^2 **65.** $2\sqrt{36-\frac{50}{\pi}}$ **67.** г. 6 см е. 30° **76.** а. 34° б. 112° **77.** а. 30° б. $7\sqrt{3}$ см **78.** б. $y=0,\ x=1$ **83.** 9 **86.** Пифагорын теорем хэрэглэнэ.

VIII БҮЛЭГ

1. а. $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{3}{4}$; б. $\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{1}{3}$; в. $\frac{8}{17}, \frac{15}{17}, \frac{8}{15}$; **2**. а. 0.1564; б. 0.8387; в. 3.7321. **4**. а. $\cos 10^0$; б. $\sin 25^0$; в. $\frac{1}{tg15^0}$; **5**. а.1; б. 2. **6**. *а*. $\frac{5}{13}; \frac{5}{12}$. *б*. $\frac{2\sqrt{2}}{3}; \frac{2\sqrt{2}}{4}$. *в*. $\frac{3\sqrt{10}}{10}; \frac{\sqrt{10}}{10}$. **7**. *а*.0.6. *б*. $\frac{\sqrt{51}}{10}$. *в*. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. *г*. –0.8. **8**. а. 145^0. б. 139^0. в. 96^0. г. 118^0. **9**. а. 40^0. б. 44^0. в. 28^0. г. 19^0. **10**. а. 0.64. б. -0.54. в. 0.96. г. 0.97. **11**. а. 65^0. б. 125^0. в. 51^0. г. 152^0. **12**. а. 123^0. б. 97^0. в. 146^0. г. 130^0. **16**. а. 41.5^0. б. 106.5^0. **19**. 14.5^0. **20**. 207.01. **23**. а. 65^0. б. 72^0. в. 44^0. **25**. y=31.3м, x=15.65м. **26**. 62^0; 118^0. **28**. $\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; энд $2p=a+b+c$. **29**. $\sqrt{\frac{c^2}{4}+\frac{d^2}{4}\pm\frac{cd}{2}\cos\alpha}$ **30**. $\sqrt{a^2+b^2\mp 2abcos\alpha}$. **31**. 13 буюу $\sqrt{1513}$. **32**. 0.6; 0.51; 0.38. **33**. $\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}; \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}; \frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2b^2-c^2}$. **36**. болохгүй. **37**. болохгүй. **38**. $\frac{b\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$ **39**. $\frac{a\cdot tg\alpha\cdot tg\beta}{tg\alpha-tg\beta}$. **40**. $AD>BD$. **43**. Хажуу тал нь урт. **53**. $50\sqrt{13}$. **54**. $\frac{a^2}{2}$. **55**. 2. **56**. 9 дахин томорно. **57**. 5. **58**. 8; 18. **59**. 25 дм, 12 дм. **60**. 30^0. **61**. Квадрат. **62**. 200 см^2. **63**. 202.8 см^2. **65**. $\sqrt{15}$см. **68**. 4800 м^2. **69**. $\frac{a^2}{4}$. **70**. 6 см. **72**. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. **73**. $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$. **74**. 600 см^2. **75**. 55; 48. **76**. 90^0. **77**. 0.46 м^2. **78**. 5.64 м^2. **79**. $\frac{a^2 sin\beta\cdot sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)}$. **87**. 4.5 см. **89**. 29 см. **90**. $20\sqrt{555}$ см^2. **91**. 540 м^2. **92**. 1). 20π см^2, 2). 12π см^2, 3). $\left(a^2-b^2\right)\pi$.

IX БҮЛЭГ

1. $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{LA}, \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{FG}, \overrightarrow{DE}=\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{LG}$ **2.** $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$ 3. $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{OB}=\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{EO}=\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OD}$ 4. а. $\overrightarrow{FG}=\vec{a}$ б. $\overrightarrow{FD}=\vec{c}$ в. $\overrightarrow{GH}=-\vec{b}$ г. $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ д. $\overrightarrow{BA}=-\vec{a}$ е. $\overrightarrow{DC}=\vec{a}$ ё. $\overrightarrow{DA}=-\vec{b}$ з. $\overrightarrow{CG}=-\vec{c}$ ж. $\overrightarrow{FE}=-\vec{b}$ 5. $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$ 7. а. $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CO}$ б. $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DO}$ в. $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EO}$ 10. а. $\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}$ б. $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{5}\left(2\vec{b}-3\vec{a}\right)$ 11. *AX* $\overrightarrow{AX}=\frac{9}{13}\left(3\vec{b}-3\vec{a}\right)$ 12. а. $\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{c}$ б. $\overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a}$ в. $\overrightarrow{AE}=\frac{5}{3}\vec{c}-\vec{a}$ г. $\overrightarrow{OF}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$ 13. Заавар: HG, EF хэрчмийг BD хэрчимтэй параллел болохыг үзүүлэх. 14. а. $\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$ б. $\overrightarrow{OE}=\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$ в. $\overrightarrow{OC}=\frac{3}{2}\vec{b}-\vec{a}$ 15. $\overrightarrow{MF}=\frac{3}{7}\vec{c}-\frac{1}{14}\vec{b}$ 16. а. $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$ б. $\overrightarrow{BO}=-(\vec{a}+\vec{c})$ в. $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$ г. $\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$ 17. а. $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$ б. $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}(2\vec{a}+\vec{b})$ 18. а. $\overrightarrow{BF}=-\frac{1}{2}\vec{a}$ б. $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{a})$ в. $\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{c}$ г. $\overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a}$ 19. $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{b})$ 20. а. $\overrightarrow{BA}=\vec{a}+\vec{b}$ б. $\overrightarrow{OC}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{5}{3}\vec{b}$ в. $\overrightarrow{BC}=-\frac{4}{3}(\vec{a}+\vec{b})$ 21. а. $7\vec{a}+20\vec{b}$ б. $7\vec{a}-\vec{b}$ в. $-\vec{c}-58\vec{b}$ 22. а. $\vec{x}=\vec{a}-6\vec{b}$ б. $\vec{x}=3\vec{b}-4\vec{a}$ в. $\vec{x}=\frac{1}{13}\left(\vec{c}-6\vec{b}\right)$

25. $D(-2,0)$ 26. $x=\pm 2$ 30. $x=-7.5$ 34. а. $\vec{a}=(2,3)$ 35. а. $\vec{a}=2\vec{i}-4\vec{j}$ 36. а. $\vec{a}=2\vec{i}$ 40. а. $\vec{b}=(-3,8), \vec{c}=(4,-12)$
41. а. $\overrightarrow{OD}=\vec{a}+\vec{b}$ б. $\overrightarrow{ON}=4\vec{a}+\vec{b}$ 43. а. $\overrightarrow{DM}=2\vec{b}$ б. $\overrightarrow{DI}=2\vec{b}-\vec{a}$ 44. а. $\vec{a}\cdot\vec{b}=7.5$ 45. а. 60° 46. а. $\cos\alpha=\frac{18}{\sqrt{413}}$

X БҮЛЭГ

4. 6 5. а) $x=7, y=-3$ б) $x=7, y=2, z=\frac{8}{3}, t=-\frac{8}{3}$ 8. $A+B=B+A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&2\end{pmatrix}$ 11. а) $\begin{pmatrix}4&-2&6\end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&-\frac{3}{4}\end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix}\frac{8}{3}&-\frac{4}{3}&4\end{pmatrix}$ 14. $x=y=-1$ 17. а) болно б) болохгүй в) болохгүй г)болно 20. $\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$ 25. а) $\begin{pmatrix}-7&9\\-3&-4\end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix}-15&15\\-5&-10\end{pmatrix}$ 30. |A|=7, |B|=10 34.а) 1 б) 732, 38. урвуугүй 41. а) $\begin{pmatrix}-10\\8\end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix}9&-5\end{pmatrix}$ 43. $X=\begin{pmatrix}1\frac{3}{8}&-3\frac{5}{8}\\5\frac{1}{8}&\frac{1}{8}\end{pmatrix}$ 1. б) $A=\begin{pmatrix}40&30&40\\20&20&10\end{pmatrix}$ в) $a_{13}=40, a_{21}=20, a_{23}=10$ г) -80 2. а) 2×3 б) 8 в) $\begin{pmatrix}0&0&1\end{pmatrix}$ хэмжээс нь 1×3 4. $x=3, y=6$ 9. а) (2) б) (-16) в) $\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$ г) $\begin{pmatrix}26&-9\\15&-5\end{pmatrix}$ 13. а) $\begin{pmatrix}2&5\\-5&-3\end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix}-6&-1\\1&-5\end{pmatrix}$ 15. а) 63 б) 91 16. а) -21 б) -54 17. урвуутай, $\begin{pmatrix}-3&4\\13&-17\end{pmatrix}$ 19. а) $\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix}16&-41\end{pmatrix}$ 20. а) $X=\begin{pmatrix}22&-9\\27&-11\end{pmatrix}$ б) $X=\begin{pmatrix}-2&-9\\3&13\end{pmatrix}$ 21. $X=\begin{pmatrix}-2&1\\-2&-7\end{pmatrix}$

XI БҮЛЭГ

2. а. (1,1), б.(1,2), в.(0.5,–0.5), **3.**$A'(2,0)$, $B'(2,-2)$, $C'(1,1)$, **6.**байгаа, $B(3,2)$, **7.** байгаа, AB хэрчим, **8. а.**$y=2$, б.$y=x$, в.$y=0$, **9.**а.$\begin{cases}x'=x\\y'=4-y\end{cases}$ б.$\begin{cases}x'=y\\y'=x\end{cases}$ в.$\begin{cases}x'=x\\y'=-y\end{cases}$ **13.**а.$A'(-1,1)$, $B'(-4,1)$, $C'(-4,2)$, б. $A'(1,5)$, $B'(-2,5)$, $C'(-2,6)$, в.$A'(3,1), B'(0,1), C'(0,2)$, **14.**а.$A'(-1,-1), B'(-1,-4), C'(-2,-4)$, б.$A'(-3,5)$, $B'(-3,2), C'(-4,2)$, в.$A'(3,3), B'(3,0), C'(2,0)$, **15.**а.$A'(1,-1), B'(4,-1), C'(4,-2)$, б.$A'(-3,1), B'(0,1), C'(0,0)$, в.$A'(1,3), B'(4,3), C'(4,2)$, **16.**$90^\circ$, **17.**$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$, **18.**а.$A'(-2,2), B'(-4,2), C'(-2,6)$, б.$A'(2,-2)$, $B'(4,-2), C'(2,-6)$, в.$A'(-2,-2), B'(-2,-4), C'(-6,-2)$, **19.**$\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$, **20.**а.$\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$, **б.** $\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, в.$\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}$, **22.**а.$\begin{cases}x'=2x-4\\y'=2y-1\end{cases}$, **б.** $\begin{cases}x'=\frac{1}{3}x-\frac{3}{10}\\y'=\frac{1}{3}y-2\end{cases}$, в.$\begin{cases}x'=-2x+1\\y'=-2y+1\end{cases}$, **23.**а.(0,0) цэгт төвтэй $\frac{1}{3}$ коэффициенттэй, $\begin{cases}x'=kx\\y'=ky\end{cases}$ ба $k=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$, **б.**(1,3) цэгт төвтэй $-\frac{1}{2}$ коэффициенттэй, $\begin{cases}x'=-0.5x+1.5\\y'=-0.5y+4.5\end{cases}$, **24.**а. (0,2) цэгт төвтэй $\frac{1}{3}$ коэффициенттэй, б.(2,1), (3,1), (3,0), (2,0) ба (–2,1), (–3,0), (–4,1), (–3,2), в. $\frac{1}{9}$,

2.а.$\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}$, б.$\begin{cases}x'=x-5\\y'=y-2\end{cases}$, в. (0,2) төвтэй 180° өнцгийн эргүүлэлт, г. $\begin{cases}x'=-x\\y'=-y+4\end{cases}$, **3.**а.(–1,2) төвтэй –3 коэффициенттэй, б. $\begin{cases}x'=-3x-4\\y'=-3y+8\end{cases}$, в. 8 1**4.а.** (0,0) төвтэй 90° өнцгийн эргүүлэлт, б. $A'(-2,1$, $B'(-1,2)$, $C(-3,6)$, **5.а.** $y=2x$, б. $p=-\frac{3}{5}, q=\frac{4}{5}, r=\frac{4}{5}, s=\frac{3}{5}$, в. $y=2x$ шулууны хувьд тэнхлэгийн тэгш хэм, д. (0,0) төвтэй -90° өнцгийн эргүүлэлт.

XII БҮЛЭГ

1. а. 145 б. 66.4 **2.** [45,50[, 34.95 [35,40[**3.** −3 **4.** а. 188.9 б. 198 **5.** 1616.5/123=13.14228 [11,15[**6.** 3051/141=21.6383 [21,25[**7.** [25,30[,[46,50[, 32 **8.** [15,18[2583.5/131=19.72137, [18,21[

11. а.

Завсар	[0,10[	[10,20[	[20,30[	[30,40[	[40,50[	[50,60[	[60,70[
Давтамж	10	80	100	60	70	30	0

б. Нийт давтамжийн тоо=35, Нэг давтамж $1 \cdot 10 = 10$ н.кв талбай эзэлнэ.

16. а. 1.67, 1, 1, 1, 2, 1 б. 6.2, 6.5, 7, 5, 7.25, 2.25 **18.** а. 36.5, 20 б. 280 өдөр г. 35.8

19. а.

Оноо	0	1	2	3	4	5-7	8-14	15-20	20-25
Давтамж	3	3	3	9	4	10	3	3	2
Хур. давтамж	3	6	9	18	22	32	35	38	40

20. б.

... цагаас өмнө ирсэн	-7:40	-7:45	-7:50	-7:54	-7:57	-7:59	-8:00
Хур. давтамж	2	5	10	16	23	31	40

23. Хүн бүрийн хариулт өөр өөр байж болох ба судалгааг хийгээгүй бол түүнийг нотлох эсвэл үгүйсгэх. арга байхгүй. **26.** а.40 **29.** а. 62.7, 33. **1.** 17.5 **2.** 5–2=3 **3а**. 16-20 б.9

XIII БҮЛЭГ

2. а.60480, б. 56, в. 604800; **3.**120; **7.** 2002,б. 56, в. 495; **8.** 190; **10.** а. 45045, б. 6006, в. 2717; **11.** 17784; **12.** 170; **13.** $C_n^2 \cdot C_m^2$; **14.** C_n^2; **15.** а. 5, б. 4, 6, 4; **16.** а. 1, 6, 15, б.C_6^k, C_6^{n-k}; **17.** а. $C_6^2 = 15$, б.$2C_6^2 = 30$, в.$3C_6^2 = 45$; **18.** C_n^2, C_n^3, C_n^4; **19.** $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 = 116280$; **20.** $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 3 = 1080$; **21.** 21; **22.** 1; **23.** 945; **24.** 16, 11; **25.** 216, а. $\frac{1}{36}$, б.$\frac{5}{9}$;

XIV БҮЛЭГ

1. болохгүй; **2.** а. 0.7, б. 0.1; **3.** а.$\frac{4}{13}$, б. $\frac{5}{13}$; **4.** а. 0.9, б. 0.4; **5.** а. $\frac{4}{15}$, б. $\frac{1}{15}$; **6.** а. 0.75, б. $\frac{5}{9}$, в. $\frac{5}{11}$; **8.** 8 эгэл үзэгдэл, 0.125; **9.** а.$\frac{4}{9}$, б. $\frac{7}{12}$; **10.**$\frac{1}{9}$; **11.** 0.02; **12.**$\frac{5}{18}$; **13.** ялгаагүй; **14.** ялгаагүй; **15.** 0.52; **16.**$\frac{1}{6}$; **17.**$\frac{35}{66}$; **18.** 0.232; **19.**$\frac{13}{30}$, $\frac{17}{30}$; **20.** $\frac{14}{15}$; **21.**$\frac{3}{51}$, $\frac{4}{51}$; **22.** $\frac{8}{11}$, $\frac{6}{11}$; **23.** 0.38, 0.44; **24.** $\frac{1}{15}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{8}{15}$; **25.** а. $\frac{28}{55}$, б. $\frac{5}{12}$; **26.** а. 0.76, б. 0.46, в. 0.26, г. 0.24; **27.** а. $\frac{13}{27}$, б. $\frac{107}{135}$; **28.** а. $\frac{5}{18}$, б. $\frac{91}{216}$; **29.** а. $\frac{1}{64}$, б. $\frac{9}{64}$, в. $\frac{37}{64}$, г. $\frac{5}{32}$; **30.** а. 0.2, б. 0.8, в. 0.6;

XV БҮЛЭГ

1.108 **2.** а≈113.3; 75.3 4. а. 74 б. 102.05 в. 182.72 г. 6 5. ≈6366.2 6. 6.3 7. ≈351.9 8. 31″ 9. а. $\frac{3}{\pi}l$ б. $\frac{2\sqrt{2}l}{\pi}$ в. 10. $a^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ 11. $\frac{570 + 75\sqrt{3}}{8}$ 12. а. 1456.96; 5024 б. 53.38; 25.89 г. 1880; 7920 д. 501.36; 672 13. а. 226; 140 б. 144π; 120π в. 806π; 2008π 14. 15π; 54.6 15. 6 17. 0.25 18. 2.29 19. 2 дахин 20. $\frac{abQ}{4(a+b)}$ 21. а. $\frac{\sqrt{3}}{4}ba^2$ б. ba^2 в. $\frac{3\sqrt{3}}{2}ba^2$ 22. $\frac{1}{8}a^3$ 23. 48см³ 24. а.$\frac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{12}$ б. $\frac{a^2\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{6}$ в. $\frac{a^2\sqrt{3(b^2 - a^2)}}{2}$ 25. $R = \sqrt[3]{2}r$ 26. $\approx 1686.3\pi$ 27. 33.3 28. $\frac{45\sqrt{55}\,\pi}{13}$ 29. $\sqrt[3]{\frac{3}{16}}a$ 34. 200 35. 175;273 36. а.$\sqrt{82}$ б. $\sqrt{73}$ в.$12\sqrt{73}$ г. $36 + 12\sqrt{73}$ д.$24\sqrt{2}$ е. 96 37. $\frac{h}{\sqrt[3]{2}}$ 38.$\frac{h\sqrt{Q}}{\sqrt{Q} - \sqrt{L}}$ 39. 375 40. 9 41. $5\sqrt{3}$ 42. а. 900π б. 375π в. 196 43. а. 204; $180 + 12\sqrt{7}$ б. $150 + 16\pi$; $125 + 16\pi$ в. 152; 132 48. 340π; 725π 49. 132π; 240π